Hausarbeit zum Proseminar
„Einführung in Kants Kritik der reinen Vernunft“
bei Dr. Peter Baumann

Kant, fünf und sieben

Sven-S. Porst*

Oktober 1998

Inhalt

1 Vorab

„Da hast du dir ja ein langweiliges Thema ausgesucht,“ bekam ich von Kommilitonen zu hören, als ich meine Pläne für die Hausarbeit verriet. Das Thema erscheint zunächst unattraktiv: Es ist nicht entscheidend für Kants Werk, nimmt nur wenig Platz darin ein und wurde auch während des Seminars nur kurz angeschnitten. Leider hinterließ das bei mir ein unbefriedigendes Gefühl, so daß ich der Sache auf den Grund gehen wollte und schon heimlich begann Fallen zu bauen, in die Kant tappen sollte. Besonders die mir noch immer unverständliche These, $7 + 5 = 12$ sei ein synthetisches Urteil bewegte mich zu solchen Hinterhalten.

Die Auseinandersetzung mit dem Thema war dann zwiespältig: Einerseits gab es Literatur, die sich allgemein mit der Kritik der reinen Vernunft befaßt oder das Buch

*e-mail: `ssp@earthling.net`

nur paraphrasiert und die mein Thema nur streift – mithin nicht sonderlich hilfreich war. Andererseits wurde ausführlich auf die verschiedenen Aspekte und Probleme einzelner Punkte hingewiesen. Die sorgfältige Arbeit Vaihingers [3] oder der ähnliche aber weniger ausführliche Text Smiths [4] sei hier genannt. Erst der sich nicht ausschließlich Kants Werk widmende Text Freges [5] vermochte mich deprimieren – mußte ich doch feststellen, daß ich nicht der erste bin, der Kant (zumindest auf dem Gebiet der Arithmetik) in die Falle locken will.

Obwohl die betreffende Textstelle in der Kritik der reinen Vernunft – ich habe mich hier auf Abschnitt V der Einleitung zur zweiten Auflage konzentriert – kurz ist, birgt sie doch viele Stellen, die Mißverständnisse oder Zwischenfragen hervorrufen. Auf einige von ihnen gehe ich ein, andere bleiben unerwähnt, um den Rahmen sowohl der fertigen Hausarbeit als auch der für mich damit verbundenen Arbeit nicht zu sprengen.

Ich versuche Überschneidungen mit den Feststellungen Freges in [5], denen ich mich größtenteils anschließen kann, zu vermeiden und nehme mir außerdem die Freiheit, auf Textstellenangaben zu Zitaten aus dem V. Abschnitt der Einleitung zu verzichten, da der Text sehr übersichtlich ist und die Angaben wegen der geringen Ausdehnung des Textes wenig Information böten.

Zunächst werde ich die betrachtete Textstelle in den Gesamtzusammenhang der Kritik der reinen Vernunft einordnen, sie dann darstellen und schließlich einige meiner Probleme mit dem Text und die dazugehörigen Erklärungsansätze vorstellen, wobei mein Schwerpunkt bei der Mathematik allgemein und dem $7 + 5 = 12$ Problem liegt.

2 Kontext

Während Kants Hauptthese des betrachteten Abschnitts, „Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch,“ fundamentale Konsequenzen für die Mathematik haben, sind sie für das Gesamtprojekt der Kritik der reinen Vernunft unbedeutend.

Hierfür spricht, daß in der ersten Auflage des Buches mathematische Aussagen nur zur Unterstützung anderer Argumente dienten,[1] nicht aber selbst Gegenstand der Untersuchung wurden. Zwei Jahre nach Veröffentlichung der ersten Auflage hielt die Auseinandersetzung mit mathematischen Urteilen Einzug in die Prolegomena ([2] §2c, 2). Die dort aufgeführte Stelle wurde ohne Änderungen in die Einleitung der zweiten Auflage der Kritik der reinen Vernunft übernommen ([1] B14ff). Auf diese Textstelle werden sich meine Bemühungen konzentrieren.

Zurück zur Ausgangsthese, die Abhandlungen über die Mathematik seien für Kants Projekt nicht entscheidend: Kant führt die Mathematik (und auch die Physik) nur auf, um mittels der Existenz von Wissenschaften, die synthetische Urteile a priori hervorbringen, nahezulegen, daß solche Wissenschaften überhaupt existieren und daß die Metaphysik – sein eigentliches Anliegen – auch eine solche sei.

Ein geglückter Beweis, daß die Mathematik solche Eigenschaften hat, ist zwar interessant für die Mathematik und den Leser, bringt Kant aber kaum weiter. Andersherum bringt ein Scheitern dieses Beweises auch nicht Kants Projekt zum Einstürzen.

[1] z.B. bei den Axiomen der Anschauung (7+5=12) [1] A164ff oder bei den Raumargumenten (Geometrie) [1] A30ff

3 Der Text

Bevor ich zu meinem Hauptanliegen in Abschnitt V der Einleitung komme, möchte ich die in Abschnitt IV gegebene Definitionen von analytisch und synthetisch zusammentragen, da diese für das Weitere grundlegend sind:

analytisch sind für Kant diejenigen Urteile, „in welchen die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekt durch Identität [...] gedacht wird.“[2] Er benennt sie daher auch als „Erläuterungsurteile.“ Durch sie wird ein Begriff in seine Teilbegriffe untergliedert. Analytische Urteile enthalten also nur Prädikate, die schon im betroffenen Subjekt enthalten sind.

synthetisch nennt Kant jene Urteile, in denen die obengenannte Verknüpfung zwischen Subjekt und Prädikat *nicht* als Identität gedacht wird. Das Prädikat liegt also außerhalb des Begriffes und wird diesem hinzugefügt. Daher benennt Kant sie auch als „Erweiterungsurteile.“ Außerdem stellt Kant fest, daß „Erfahrungsurteile [...] insgesamt synthetisch“ sind.

Mit diesem Rüstzeug schickt sich Kant an in Abschnitt V zu zeigen, daß alle theoretischen Wissenschaften der Vernunft, also auch die Mathematik, synthetische Urteile a priori als Prinzipien enthalten. Im hier betrachteten ersten Teil des V. Abschnitts befaßt sich Kant mit der Mathematik in drei Abschnitten.

die gesamte Mathematik Kant behauptet: „Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch.“ Er sieht, daß diese Behauptung anderen Argumentationen widerspricht, nach denen mathematische Urteile analytisch sind, da sie mit Hilfe des Satzes des Widerspruchs zustande kommen. Kant begründet seine These damit, daß bisher fälschlicherweise angenommen wurde, die Grundsätze der Mathematik ergäben sich ebenfalls aus dem Satz des Widerspruchs. Mit den von ihm als synthetisch dargestellten Grundlagen sollen auch alle daraus mit Hilfe des Satzes des Widerspruchs gefolgerten Aussagen synthetisch sein. Zuletzt stellt Kant fest, die (reine) Mathematik sei apriorisch.

$\mathbf{7 + 5 = 12}$ als synthetischen Satz bringt Kant zur Verdeutlichung seiner Ausgangsthese. Er argumentiert, daß durch den Begriff der Summe von 7 und 5 der Begriff von 12 noch nicht gedacht sei und auch nicht durch bloße Zergliederung erhalten werden kann. Er erläutert, wie die Summe von 7 und 5 seiner Meinung nach unter Zuhilfenahme der Anschauung gedacht und dem analytischen Urteil die Zahl 12 hinzugefügt wird. Um sein Ergebnis zu bestärken führt er an, daß man speziell bei größeren Zahlen auf die Anschauung angewiesen sei und ein analytischer (zergliedernder) Prozeß bereits an seiner Komplexität scheiterte.

Geometrie Ebenso behauptet Kant, kein Grundsatz der reinen Geometrie sei analytisch. Seine Idee verdeutlicht er an der Geraden, die außerdem die Eigenschaft hat, kürzeste Verbindung zweier Punkte zu sein. Diesen Satz bezeichnet er als Grundlage der Geometrie – im Gegensatz zu Sätzen wie $a = a$, die zwar analytisch seien aber keinen Grundsatz bilden, sondern lediglich „zur Kette der Methode“ gehören.

[2] Dieses und die folgenden Zitate des IV. Abschnitts der Einleitung der 2. Auflage sind auf den Seiten [1] B11ff zu finden

abschließend faßt Kant zusammen, daß es bei der Bildung synthetischer Urteile nicht entscheidend sei, „was wir zu dem gegebenen Begriffe hinzu *denken sollen*, sondern, was wir *wirklich* in ihm, obzwar nur dunkel, *denken*.“ Hieraus sieht man nach Kant, daß ein synthetisches Prädikat zwar notwendig einem Begriff über den Umweg einer Anschauung angehöre aber nicht in ihm enthalten sei.

4 Probleme mit dem Text und Erklärungsversuche

4.1 Was in der Mathematik ist synthetisch?

Kant räumt ein, daß die Schlüsse in der Mathematik, die durch den Satz des Widerspruchs entstehen, alleine keine synthetischen Urteile liefern können. Er behauptet zweierlei:

(i) Ein Urteil heißt auch dann synthetisch, wenn es durch den Satz des Widerspruchs aus einem synthetischen Urteil gefolgert wird.

(ii) Die Grundsätze (der Mathematik) können nicht aus dem Satz des Widerspruchs eingesehen werden und sind daher synthetisch.

Diese Thesen werfen einige Fragen und Probleme auf. Außerdem werden sie nicht begründet.

Das Fehlen einer Begründung der „Vererbbarkeit“ des Synthetischseins von einem Urteil auf aus ihm gefolgerte Urteile scheint auch Paulsen gestört zu haben: „Kant gibt selbst entweder den Namen synthetisch für Lehrsätze oder den Sinn des Namens auf.“ (siehe [3] S. 294) Nach der Definition von synthetisch dürften nur die grundlegenden Axiome und Definitionen synthetisch sein, was weit von Kants Anspruch, daß die gesamte Mathematik sei synthetisch, entfernt ist.

Wenngleich der Einwand Paulsens verständlich ist, läßt er sich mit nur geringer Mühe umgehen: Z.B. indem man Punkt (i) als Teil der Definition von synthetisch auffaßt. Man könnte dann zusätzlich zwischen direkten und indirekten – mit Hilfe des Satz des Widerspruchs aus anderen synthetischen Urteilen geschlossenen – synthetischen Urteilen unterscheiden. Auch eine Analogie zu den reinen und empirischen Urteilen, wo aus empirischen Urteilen nur empirische gefolgert werden können, läßt sich aufbauen, um Kants Argumentation zu stützen.

Hat man diese „Vererbbarkeit“ akzeptiert, ergibt sich sofort, daß alle Folgerungen der Mathematik, die synthetische Urteile sind, mit meiner Bezeichnungsweise von oben nur indirekte synthetische Urteile sein können. Folglich müssen bereits die Axiome bzw. Definitionen der Mathematik synthetisch sein.

Kant sieht ebenfalls, daß synthetische Grundlagen notwendige Bedingung für eine synthetische Mathematik sind. Er stellt die These auf, daß dem so sei, bleibt aber die Begründung schuldig, was eine Lücke in der Beweiskette hinterläßt.

Der von Kant verwandte Begriff ‚Grundsätze‘ ist unklar. Er kann für Definitionen und Axiome stehen, könnte aber ebensogut für ein nicht näher faßbares oder genanntes (geheimnisvolles) inneres Wesen der Mathematik stehen. Ich favorisiere eindeutig die erste Möglichkeit und hoffe, daß dies wegen der größeren Klarheit auch in Kants Sinne ist. Die Auffassung der „Grundsätze“ als Axiome und Definitionen harmoniert mit der

„Vererbbarkeit,“ steht aber im Widerspruch zu (ii): Da Axiome und Definitionen frei gewählt werden können, vermag ich in ihnen keine synthetischen Urteile zu sehen.[3]

Als Mögliche Argumentation für die Synthetizität der Axiome und Definitionen erscheint mir die Folgende:

> Obwohl die Axiome und Definitionen formal frei gewählt werden dürfen, greift man immer wieder auf dieselben zurück, da sie „Sinn machen oder sinnvolle Vereinfachungen ermöglichen. An der Verwendung des Wortes „Sinn“ wird deutlich, daß der Vorteil dieser Definitionen auf formaler Ebene nicht zu fassen ist, sondern nur auf inhaltlicher Ebene gefunden werden kann.
>
> Dieser inhaltliche Aspekt geht über den rein mathematischen Teil des Axioms bzw. der Definition hinaus und kann daher als Grundlage für das Synthetische aufgefaßt werden. Als Beispiel: Ist eine Menge durch die Peano-Axiome beschrieben, so hat sie außer den durch die Peano-Axiome gegebenen Eigenschaften auch das Merkmal, dieselben Eigenschaften wie das zu haben, was wir als die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen.[4]

Leider kann ich mich nicht eindeutig gegen diese Argumentation aussprechen – aber auch nicht eindeutig dafür: Entscheidend ist die Einführung des synthetisch-machenden Prädikats „Sinn.“ Nach der Definition von „synthetisch“ scheint es in Ordnung zu sein. In Kants Beispielen für synthetische Urteile a priori stammt das synthetisch-machende Prädikat im Gegensatz zu „Sinn“ aus demselben Themengebiet wie die im Subjekt liegenden Prädikate. Das ist ein Indiz dafür, daß die Argumentation unzulässig sein könnte.

4.2 Das $7 + 5 = 12$ Problem

Ich dachte anfänglich, der Satz $7 + 5 = 12$ sei analytisch – und konnte mich noch keines besseren besinnen. Das einfache Argument hierfür ist, daß durch die Definition der Operation „+“ auf den natürlichen Zahlen das Ergebnis bereits festgelegt ist. Es stellt sich die Frage, weshalb Kant das Urteil[5] $7 + 5 = 12$ als synthetisch ansieht.

Ein Erklärungsversuch greift auf meine Argumentation aus 4.1 zurück: Damit das Urteil $7+5 = 12$ synthetisch ist, muß bereits die Definition von „+“ synthetisch sein. Im

[3]Wie schon Frege bemerkte, kann man an dieser Stelle Probleme mit Kants Verständnis eines Urteils als Subjekt-Prädikat-Beziehung bekommen ([5] §88, S. 94). Da Kant aber nur für Urteile den Begriff ‚synthetisch‘ definiert hat, müssen die „Grundsätze“, nach meiner Auflösung also die Axiome und Definitionen Urteile sein. Im Folgenden sehe ich dieses Problem als gelöst an, sei es durch eine großzügige Auslegung der Definition von „Urteil“ oder durch eine geeignete Umformulierung der Axiome und Definitionen, so daß sie Urteile werden.

[4]An dieser Stelle verlassen wir die exakte Welt der Mathematik und begeben uns in die Gefilde natürlicher Sprache, die uns nicht vor Ungereimtheiten schützt und deren Definitionen bzwṠynonyme wie Quine im zweiten Essay von [6] dargelegt hat, problematisch sind.

[5]Auch hier kann der Begriff ‚Urteil‘ Probleme bereiten. Wenn $7+5 = 12$ ein Urteil ist, was sind Subjekt und Prädikat? Hier erscheint mir als einzige Lösung praktikabel, die mathematische Aussage $7 + 5 = 12$ als Subjekt und den Wahrheitswert „wahr“ als Prädikat aufzufassen (und nicht wie der von Vaihinger [3] S. 297 erwähnte Fischer, der $7 + 5$ als Subjekt mit dem dazugehörigen Prädikat 12 auffaßt). Nur so kann man sinnvoll mit Ausdrücken wie $7 + 5 = 13$, $7 + 5 \neq 13$, $7 + 5 > 7$ oder dem von Kant (zumindest in der Geometrie als analytisch anerkannten) $7 + 5 > 7$ umgehen. Trotz dieser Probleme werde ich weiter das Wort „Urteil“ verwenden, um in Kants Terminologie zu bleiben.

Sinne der Argumentation ist sie das auch, da die Operation „+" auf den natürlichen Zahlen die zusätzliche Eigenschaft hat, genau unserer Vorstellung der Addition natürlicher Zahlen zu entsprechen.

Dieser Erklärungsversuch hat zwei große Nachteile: Zum einen bin ich mir, wie oben bereits erwähnt, nicht sicher, ob dem Argumentationsweg zu trauen ist, zum anderen trägt er nicht zum Verständnis von Kants Argumentation bei, die vollkommen anders ist.

Kant beschreitet in seiner Argumentation den Umweg über Begriffe und Anschauung.[6] Er spricht zunächst vom „Begriff der Summe von 7 und 5," der die „Vereinigung beider Zahlen in eine einzige" darstelle.[7]

Durch die Verwendung nichtmathematischer Begriffe verliert Kant hier an Präzision, da z.B. $7 \cdot 5$ auch eine „Vereinigung beider Zahlen in eine einzige" zur Folge hat. Durch das „+" ist nicht nur die Aufforderung zum Zusammenfügen der Zahlen, sondern auch die Art und wegen der Wohldefiniertheit der Operation auch das Ergebnis dieser „Vereinigung" vorgegeben.

Im Weiteren ist es für Kant wichtig, die Addition zunächst in die Anschauung zu übersetzen und die Zahlen erst dort zusammenzufügen. Wegen der „passenden" Definition der Operation „+" liefert dieser Weg zwar auch das richtige Ergebnis, ist aber weniger allgemein und auf anschaubare Vorgänge eingeschränkt.

Gegen das rein analytische Urteil mag eingewandt werden, daß es mangels Anschauung leer im Sinne von „Gedanken ohne Inhalt sind leer" ([1] B75) sei. Das ist richtig. Das Füllen ihrer Sätze mit Anschauung – wenngleich es unwidersprochen hilfreich ist – obliegt aber nicht der Mathematik,[8] die ihre Stärke gerade aus der Freiheit von Anschauung zieht. Die Anschauung in die Mathematik miteinzubringen wäre speziell am Beispiel der Arithmetik problematisch, da sich etliche Zahlenarten und Operationen der Anschauung entziehen.

Folglich bleibt mir auch Kants Beispiel mit großen Zahlen, das seine These unterstreichen soll, fremd, da sich einerseits die großen Zahlen der Anschauung entziehen und andererseits durch die Definition der Addition die Summe großer Zahlen sehr wohl gegeben ist.

4.3 Geometrie

Nach dem bisher gesagten liegt es nahe, daß ich auch mit Kants These, kein Grundsatz der reinen Geometrie sei analytisch, Schwierigkeiten habe. Diese Schwierigkeiten sind ähnlich wie die in 4.2. Dadurch, daß Kant in seinem Beispiel eine Gerade sei die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf exakte Definitionen für Gerade, Linie, Länge bzw. kürzeste und der Axiome der (euklidischen) Geometrie verzichtet, bleibt seine Betrachtung auf einer anschaulichen Ebene, so daß sich die These einer genauen Betrachtung entzieht.

[6] Die Begriffe können sich in diesem Zusammenhang auch als problematisch herausstellen. Es ist zu klären, was der Unterschied zwischen einer Zahl und dem Begriff einer Zahl ist. Ebenso gestaltet sich die Anschauung der Zahl, die insbesondere eine reine Anschauung sein sollte, da Kant nur Urteile a priori erhalten will. Diese Anschauung ist aber nicht oder zumindest nicht immer (z.B. für große Zahlen, negative Zahlen, Brüche, irrationale Zahlen) gegeben (siehe auch [5] §89, S. 93)

[7] Analog hierzu spricht er auch in den „Axiomen der Anschauung" [1] B??? von der „Vorstellung von der Vereinigung beider".

[8] Zumindest bedarf dieser Punkt der Diskussion.

Dieser Verzicht liegt näher als bei $7 + 5 = 12$, da die Geometrie stärker mit der Anschauung verknüpft ist bzw. bei ihr zumindest eine stärkere Verknüpfung vermutet wird als die Arithmetik.[9]

Dennoch sollten die Möglichkeiten, die uns als anschaulich erscheinenden Dinge algebraisch auszudrücken nicht außer Acht gelassen werden. Diese Konstrukte aus Axiomen und Definitionen sind zwar auch zunächst leer, können dafür aber über die Grenzen der Anschauung hinausgehen (über-3 dimensionale Räume oder nicht-euklidische Geometrien seien hier als Beispiele genannt). Für kleine Teile von ihnen entdecken wir wie in 4.2 wegen geeigneter Definitionen Analogien zu unserer Anschauung.

Da ich die Zusammenhänge zwischen Anschauung und Geometrie noch weniger überblicke als die Zusammenhänge bei der Arithmetik und es mir bei der Geometrie schwerer fällt, mich von der Anschauung zu lösen, als bei der Arithmetik, möchte ich mir hier kein deutlicheres Urteil erlauben.

Die Gefahr, beim Betreiben von Geometrie der Anschauung zu verfallen versuchte z.B. Hilbert zu umgehen, indem er vorschlug Begriffe wie ‚Punkt,‘‚Gerade‘ und ‚Ebene‘ durch in diesem Zusammenhang inhaltsleere Begriffe wie ‚Stuhl,‘‚Tische‘ und ‚Tasse‘ zu ersetzen. Etwas ähnliches kam in meiner Schulzeit vor: Im Rahmen eines mathematikdidaktischen Projekts sollte u.a. der Umgang mit formalen Aussagen, Quantoren, Folgerungen etc. geübt werden. Hierzu wurden unter Verwendung von Phantasieworten Axiome aufgestellt, mit deren Hilfe Aussagen bewiesen werden sollten. Im Gegensatz zu Hilbert wußten wir nicht um den geometrischen Hintergrund dieser Aussagen – bei geeigneter Ersetzung der Phantasieworte handelte es sich um Sätze der projektiven Geometrie. Da wir als Mittelstufenschüler den geometrischen Hintergrund dieser Sätze nicht kannte, kann man sich auf den Standpunkt stellen, wir hätten keine Geometrie betrieben. Ein Beobachter, der die Geometrie nur in dieser Phantasiesprache kennt, widerspräche vielleicht.

Hiermit sind wir wieder bei der Frage gelandet, wie und durch wen mathematische Definitionen und Sätze mit Inhalt zu füllen sind.

5 Abschließend

Trotz meiner abweichenden Ansichten über und meiner mangelnden Einsichten in Kants Thesen und Argumentationen mag ich ihm nicht böse sein, da meine Probleme mit seinem Text vielleicht nur auf Ungenauigkeiten oder Mißverständnissen durch die seit Kants Zeiten veränderte Sichtweise der Mathematik beruhen. Weiterhin mußte ich feststellen, daß ich meine eigenen Thesen zu dem betrachteten Thema auch nicht hinreichend genau und sicher beweisen kann, so daß mich diese Thema noch eine Zeitlang beschäftigen wird.

Die Kernfrage, die es noch zu behandeln gilt, scheint mir nach den in Abschnitt 4 aufgetretenen Problemen und aufgeworfenen Fragen: Kann und muß die Mathematik es leisten, ihre Sätze und Definitionen mit Inahlt zu füllen? Im meiner Phantasielosigkeit neige ich zu der Antwort „Nein“. Von der Prämisse ausgehend, die Antwort sei „ja“, hätten Kants Argumentationen allerdings bessere Erfolgschancen.

[9] Auch Kant stellt in der Ästhetik ([1] B37ff) den direkten Zusammenhang zwischen der reinen Anschauung des Raums und der Geometrie her, was analog für die Arithmetik nicht passiert.

Literatur

[1] Kant, Immanuel. Kritik der reinen Vernunft, 1. Auflage 1781 (A); 2. Auflage, 1787 (B).

[2] Kant, Immanuel. Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können, 1783.

[3] Vaihinger, Hans. Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft, Union Deutsche Verlagsgesellschaft, 2. Auflage 1922.

[4] Smith, Norman Kemp. A commentary to Kant's Critique of pure reason, New York Humanities Press, 2nd Edition, 1962.

[5] Frege, Gottlob. Die Grundlagen der Arithmetik, herausgegeben von Christian Thiel, Felix Meiner Verlag, 1988.

[6] Quine, Willard van Orman. Two Dogmas of Empiricism in From a logical point of view, Harper Torchbooks, 2nd Edition.