Seminar zu Freges Grundlagen der Arithmetik
bei Prof. Dr. Felix Mühlhölzer

„Protokoll“ von Sven-S. Porst*

Sommersemester 1999

Vorab

14. April Bereits in der ersten Sitzung wurde das Ziel Freges – nämlich die Beantwortung der Frage „Was ist eine Zahl?“ – erwähnt. Auch der von Frege gewählte Weg zur Beantwortung dieser Frage, indem er die Begriffe und die Sätze der Arithmetik auf die Logik zurückführt, sowie sein Scheitern bei der Formalisierung seiner Darstellung der Arithmetik wurden umrissen.

Da Frege letztlich die Arithmetik in der Sprache der Logik formulieren möchte, muß er insbesondere die Peano-Axiome mit logischen Mitteln herleiten. Zu den Peano-Axiomen gehört das umstrittene Induktionsaxiom, das das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ermöglicht. Zum besseren Verständnis wurde die Vorgehensweise bei einem Induktionsbeweis beschrieben und an einem Beispiel demonstriert. Die Logik, die Frege verwendet, ist Logik der zweiten Stufe, die auch Quantisierungen über Prädikate – z.B. $\forall x \forall F(Fx)$ erlaubt.

Einleitung

21. April In der Einleitung begründet Frege die Notwendigkeit seines Anliegens damit, daß die Frage nach der Natur der Zahlen von Mathematikern als zu simpel abgetan wird, obwohl verschiedene Personen diesbezüglich verschiedener Ansicht sind. Diese Verständnislücke in den Grundlagen der Mathematik gilt es zu schließen.

Zur Vorgehensweise stellt Frege klar, daß seine Betrachtungen nicht alleine auf dem Feld der Mathematik stattfinden können, sondern auch philosophische Aspekte in sich tragen. Hierbei ist es ihm wichtig, auf dem Gebiet der Logik zu bleiben und psychologische Aspekte außen vor zu lassen. Frege wendet sich gegen die Psychologie, weil er der Ansicht ist, es sei wichtiger, *wie* wir denken sollen, als *warum* wir so denken, was von Person zu Person verschiedene Gründe haben kann. Auf Seite V der Einleitung faßt

*ssp@earthling.net

er dies mit folgenden Worten zusammen: „Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleichgiltig.“

Zum Abschluß der Einleitung stellt Frege drei Grundsätze seiner Untersuchung vor: Zunächst die zuvor beschriebene strenge Trennung zwischen Psychologie und Logik. Zweitens, daß zum Verständnis der Wörter diese nicht isoliert, sondern stets im Zusammenhang betrachtet werden sollen. Dieses Vorgehen zur Analyse der Sprache finden wir nicht nur später in Freges Werk wieder, es findet als „Kontextprinzip“ in der gesamten analytischen Philosophie Verwendung. Nach dem Kontextprinzip hat das Verstehen eines Begriffes nichts damit zu tun, was in unserem Kopf vorgeht, sondern damit, was wir sagen, also, in welchem Zusammenhang wir sie verwenden. Um die Trennung zwischen Psychologie und Logik zu verwirklichen, ist die Einhaltung dieses zweiten Grundsatzes notwendig. Als drittes betont Frege den Unterschied zwischen Begriffen und Gegenständen, den wir am Beispiel des Aussagesatzes „Sokrates ist weise“ herausgearbeitet haben: Hier ist „Sokrates“ ein Name für den Gegenstand Sokrates und „... ist weise“ es Prädikat für den Begriff des weise-seins.

vorangehende Betrachtungen

In den Paragraphen 1 und 2 betont Frege die Wichtigkeit der Strenge in der
Mathematik. Diese Strenge, die schon bei den Griechen bekannt war, die § 1
zwischenzeitlich aber vernachlässigt wurde, hat die Mathematik wieder eingeholt. Eine strenge und genaue Arbeit in der Mathematik ist nur möglich, wenn man auf präzise Definitionen zurückgreifen kann, um die sich die Mathematiker speziell bei der Entwicklung der Analysis gedrückt hatten.

Besonderes Kennzeichen dieser strengen Vorgehensweise ist, daß auch § 2
Sätze bewiesen werden, die unstrittig sind. Mit Hilfe eines Beweises können wir nicht nur andere von der Gültigkeit eines Satzes überzeugen, sondern auch Zusammenhänge bzw. Abhängigkeiten der Sätze entdecken. Frege äußert weiterhin die Hoffnung, tiefere Einsicht in Begriffsbildungs- und Argumentationsprozesse gewinnen zu können.

Anschließend definiert Frege analytisch, synthetisch, a priori und a po- § 3
steriori. Hierbei weichen seine Definitionen von denen Kants oder den heute gebräuchlichen ab. Gemäß seines zweiten Grundsatzes aus der Einleitung hängt auch diese Entscheidung daran, wie wir die Urteile begründen und nicht darin, wie wir sie gewinnen.

Am wichtigsten ist für uns Freges Definition von analytisch, da er später zeigen will, daß die Arithmetik analytisch ist. Im Gegensatz zu anderen Definitionen, greift Frege nicht darauf zurück, was in den Begriffen enthalten ist – oder gar, was wir in ihnen denken –, sondern definiert, daß die Urteile analytisch sind, für deren Begründung wir nur auf logische Gesetze und Definitionen zurückgreifen müssen.

Es ist anzumerken, daß Frege Sätze, die synthetisch a priori sind, zuläßt. Aus seiner Sicht sind z.B. die Sätze der Geometrie synthetisch a priori.

Abschließend kündigt Frege an, daß er die Grundsätze der Arithmetik streng und lückenlos aus wenigen „Urwahrheiten" beweisen will. Diese Strenge macht die Mathematik zu einem erstaunlichen Phänomen, da sie die Menschen zwingt, abstrakt und präzise zu argumentieren. § 4

Um dies tun zu können, ist es zentral, sich über die Definition der Zahl, insbesondere der „Anzahl", im Klaren zu sein, da für Frege die natürlichen Zahlen dadurch charakterisiert sind, daß sie auf die Frage „Wie viele?" antworten. Diese Klarheit will Frege liefern.

Aus der heutigen Sicht stellt sich die Frage, weshalb Frege sich auf die Zahlen konzentriert und nicht ebenso die Mengenlehre als Grundlage der Mathematik berücksichtigt. Hierzu wurde festgehalten, daß die Zahlen unstrittiger sind als die Mengenlehre und die Mengenlehre zu Freges Zeit noch nicht so etabliert war wie heutzutage.

Abschließend muß angemerkt werden, daß Frege schlampigerweise in der Fußnote von § 4 von den „positiven ganzen" Zahlen spricht, obwohl er die nichtnegativen meint. Diese Formulierung ist schlampig, weil die 0 für Freges Projekt entscheidend ist.

Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze

28. April Bereits der Ton der von Frege gewählten Überschrift deutet an, daß er mit diesen „Meinungen einiger Schriftsteller" kritisch ins Gericht gehen wird. In den Paragraphen 5 bis 8 widmet er sich zunächst Äußerungen dazu, ob Zahlformeln beweisbar sind.

Zunächst betrachtet er die Äußerungen Kants, der alle Zahlformeln als unbeweisbar und synthetisch betrachtet. Kants Argumentation mit der Anschauung hält nach Frege der Betrachtung des Umgangs mit großen Zahlen nicht stand.[1] § 5

Im Gegensatz zu Kant halten Leibniz und Grassmann die Zahlformeln für beweisbar und streben diesen Beweis an. Frege weist ihnen aber Mängel in ihrer Argumentation nach. Bei Leibniz sind diese Mängel schnell zu finden, da er implizit das Assoziativgesetz – zumindest in einer schwachen Form $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ voraussetzt und eine Definition der Addition schuldig bleibt. § 6

[1] Kant sieht das ausdrücklich anders: „Der arithmetische Satz ist also jederzeit synthetisch, welches man desto deutlicher inne wird, wenn man etwas größere Zahlen nimmt, da es denn klar einleuchtet, daß, wir möchten unsere Begriffe drehen und wenden, wie wir wollen, wir ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, vermittelst der großen Zergliederung unserer Begriffe, die Summe niemals finden könnten." [KdrV: B15] Ich kann Kants Argumentation zwar nicht nachvollziehen, da Freges Darstellungen in § 6 aber genau das von Kant kritisierte tun, hätte Frege auf diesen Gegensatz hinweisen können.

Der Ansatz Grassmanns ist präziser als der Leibniz', so daß es etwas mehr Scharfsinn bedarf, um Mängel zu entdecken: Grassmann gibt eine rekursive Definition der Addition an. Hieran kritisiert Frege zunächst, daß Grassmann nicht zugibt, die Addition zu definieren, sondern nur sagt, er erkläre die Summe. Schwerwiegender und nicht offensichtlich ist der Vorwurf, daß Grassmann den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Ergebnisse der von ihm gegebenen Definition der Addition schuldig bleibt. Diesen Beweis müßte er liefern, um zu zeigen, daß die von ihm gegebene Addition tatsächlich eine Funktion ist.

Hart geht Frege mit John Stuart Mill als Vertreter der Empiristen ins § 7-8
Gericht. Als Kritikpunkte an der empiristischen Auffassung der Arithmetik nennt er zunächst wieder die großen Zahlen, die wir in unserer Wahrnehmung durch die Sinnesorgane nicht richtig erfassen können. Weiterhin wirft er den Empiristen vor, durch die Existenz vieler (großer) Zahlen auch sehr viele empirische Tatsachen zu postulieren. Der Zusammenhang zwischen Empirie und den Zahlen scheint auch insofern nicht gegeben zu sein, als daß wir abstrakte Gegenstände zählen können, die uns nicht durch die Sinnesorgane gegeben werden. In Mills Modell, das mit Hilfe der Anordnung verschiedener Gegenstände argumentiert, stellen außerdem die Zahlen 0 und 1 Probleme dar. Ein weiteres Argument gegen die empiristische Auffassung der Arithmetik ist, folgt aus dem ersten Grundsatz, den Frege am Ende der Einleitung nannte: Die sinnliche Wahrnehmung ist höchstens dafür wichtig, daß wir Arithmetik praktisch betreiben können, die Sätze der Arithmetik selbst sind hingegen unabhängig von ihr.

Am Beispiel Mills geht Frege über zu den Äußerungen anderer Autoren zu der Frage, ob die Gesetze der Arithmetik induktive Wahrheiten seien.
Frege hat gezeigt, daß die Zahlen aus allgemeinen Gesetzen und nicht aus der § 9
Beobachtung hergeleitet werden und mach plausibel, daß die Addition kein Naturgesetz sein kann, da sie auch außerhalb der Natur existiert. Auch hier steht Frege im Widerspruch zu Mill, der in Freges Augen den normativen Charakter der Arithmetik übersieht und daher fälschlicherweise die Sätze der Arithmetik mit ihren Anwendungen verwechselt, was zu fehlerhaften Schlüssen führt.

5. Mai Bei weiterer Untersuchung der Zahlen macht Frege folgende interessante § 10
Entdeckung: Im Gegensatz zu anderen gleichartigen Dingen, sind die Zahlen doch alle untereinander verschieden; Jede Zahl hat charakteristische Eigenschaften, die sie eindeutig bestimmen. Trotz dieser Individualität werden alle Zahlen durch dieselbe Methode, nämlich die „fortgesetzte Vermehrung um eins" erschaffen, so daß sie andererseits bereits durch ihre Konstruktion in
allen Eigenschaften bestimmt sind. Zum Ende dieser Teilbetrachtung zitiert § 11
Frege noch Leibniz, der überzeugt ist, daß uns die Arithmetik „eingeboren" ist und damit insbesondere nicht der Beispiele oder Sinneserfahrungen bedarf.

Anschließend widmet sich Frege der Meinung anderer zu der für ihn § 12 wichtigen Frage, ob die Gesetze der Arithmetik analytisch oder synthetisch a priori sind. Hier zitiert er zunächst Kant, der die Gesetze der Arithmetik als synthetisch a priori ansieht. Kant begründet diesen Status der Arithmetik mit der reinen Anschauung. Andere Autoren wie Baumann oder Lipschitz verweisen auf eine Form innerer Anschauung. Hankel spricht von eine Anschauung der Größe, wogegen sich Frege wegen der damit einhergehenden Unklarheiten und der Probleme, die bei großen Zahlen auftreten, wehrt. Er argwöhnt, daß die Autoren auf die Anschauung verweisen, wenn ihnen die guten Begründungen ausgegangen sind.

Anknüpfend an die in § 10 festgestellte Individualität aller Zahlen, warnt Frege davor, Arithmetik und Geometrie über einen Kamm zu scheren, da die in der Geometrie betrachteten Objekte nicht ebensolche individuellen Merkmale aufweisen, sondern immer als Stellvertreter für alle Objekte dieser Art (Punkte, Geraden. . .) angesehen werden können. § 13

Diese Unterscheidung ist für Frege wichtig, weil er wie Kant die Geometrie als synthetisch a priori und auf die reine Anschauung zurückgreifend ansieht. Geometrische Überlegungen, die die der Anschauung entsprechenden Axiome der euklidischen Geometrie verlassen, läßt Frege als interessante Exkurse des begrifflichen Denkens zu. Freges Haltung zur Geometrie und die Folgen aus dieser Haltung sind so speziell, daß wir auf eine nähere Betrachtung – insbesondere der eventuell auftretenden Widersprüche, z.B. mit dem Kontextprinzip – verzichtet haben. Im Gegensatz zur Geometrie ist es auf dem Gebiet der Arithmetik nicht möglich, deren Grundlagen zu ändern, ohne alles in „Verwirrung“ zu stürzen. Frege suggeriert, daß die Arithmetik innig mit dem Denken verbunden und wesentlich tiefgreifender als die Geometrie ist. Er stellt dar, daß das Anwendungsgebiet der Arithmetik – das Zählbare – nicht nur die Anschauung sondern sämtliche Gedanken umfaßt. § 14

Mit Leibniz und Jevons findet Frege Vertreter der Position, daß die Arithmetik analytisch ist und sich aus der Logik ableitet. Wenn gegen diese Position – z.B. von Mill – vorgebracht wird, daß man dann in der Arithmetik nur inhaltsleere Zeichenmanipulation betreibe, verweist er darauf, daß die verwandten Zeichen lediglich (willkürlich gewählte) Symbole sind, mit denen ein bestimmter Inhalt verbunden ist. Der Inhalt dieser Zeichen unterliegt den Gesetzen der Logik und gegebenenfalls kann er geeignet konkretisiert werden, indem man ihn z.B. in der Physik anwendet. § 15 § 16

Frege schließt das erste Kapitel zur Natur der arithmetischen Sätze mit dem – wenn auch im Konjunktiv gehaltenen – Appell, auch auf Hypothesen statt auf Fakten aufbauende Schlußfolgerungen zuzulassen. Sollten sich alle Sätze der Arithmetik durch strenge logische Schlußfolgerungen aus wenigen Grundlagen ableiten lassen, so scheint das Frege „kein ganz unwichtiges Ergebnis[s]“ zu sein mit dem etwas mehr Respekt für die Logik einherginge. § 17

12. Mai Vor der Behandlung des zweiten Kapitels wurde noch einmal ausführlich auf die Peano-Axiome und die von Frege favorisierte rekursive Definition der Addition eingegangen. Die Peano-Axiome gemeinsam mit den Rechenoperationen, ergeben die natürlichen Zahlen, mit denen wir in gewohnter Weise rechnen können.

Unsere nicht streng formalisierte Formulierung der Peano-Axiome war die folgende:

P1 0 ist eine natürliche Zahl.

P2 zu jeder natürlichen Zahl x gibt es genau eine natürliche Zahl, die *Nachfolger von* x heißt und mit x' bezeichnet wird.

P3 Ist x eine natürliche Zahl, so gilt $x' \neq 0$.

P4 $x' = y' \Rightarrow x = y$.

P5 Induktionsaxiom:
Sei E eine Eigenschaft, für die gilt:

(i) 0 hat die Eigenschaft E.

(ii) Wenn eine natürliche Zahl$x$ die Eigenschaft E hat, dann hat auch ihr Nachfolger x' die Eigenschaft E. Wir nennen eine Eigenschaft E, die diese Bedingung erfüllt auch *vererblich*.

Dann haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E.

Wir werden zunächst mit dieser nur schwach formalisierten Formulierung der Peano-Axiome arbeiten, da uns diese Vorgehensweise auf diskussionswürdige Probleme führen wird. Zur Formalisierung von P5 ist es wichtig, die Logik der zweiten Stufe zur Verfügung zu haben, von der Frege ausgeht.

Um nun die Arithmetik auf die Logik zurückführen zu können, muß Frege zunächst die 0 (P1) und die Nachfolgefunktion (P2) mit logischen Mitteln definieren und anschließend von diesen Definitionen ausgehend mit rein logischen Mitteln und der von ihm im ersten Kapitel geforderten Strenge die Axiome P2 bis P5 herleiten.

Um mit den durch die Peano-Axiome gegebenen Zahlen auch rechnen zu können, müssen wir noch Rechenoperationen definieren. Diese Definitionen nehmen wir rekursiv vor. Für beliebige natürliche Zahlen a, b definiere:

$$\begin{array}{lcc} \text{Addition :} & a + 0 := a & a + b' := (a + b)' \\ \text{Multiplikation :} & a \cdot 0 := 0 & a \cdot b' := ab + a \\ \text{Exponentiation :} & a^0 := 1 & a^{b'} := a^b \cdot a \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen kann man jetzt Summen und Produkte konstruieren, indem man sie immer wieder auf das gewünschte anwendet:

$a + 0 = a$ nach Definition, dann ist wegen $1 = 0'$ nach Definition $a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$ und ebenso wegen $2 = 1'$ $a + 2 = a + 1' = (a + 1)' = (a')'$ usw. Damit diese Maschinerie mir Sicherheit funktioniert, muß noch – wie Frege in § 6 fordert – ein Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis geführt werden, um zu sichern, daß es sich bei den definierten Operationen tatsächlich um Funktionen handelt. Die üblichen Gesetze (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz usw.) lassen sich mit Hilfe der durch P5 gestatteten vollständigen Induktion beweisen.[2] Um guten Gewissens diese starke und weitgreifende Maschinerie anwenden zu können, erörtert Frege zunächst den Unterbau dieser Definitionen.

[2] Mir scheint, als müsse man die Induktion sogar verschachteln, um z.B. das Kommutativgesetz für die Addition zu beweisen. Ich hoffe, ich habe nicht eine einfachere Möglichkeit übersehen. Der Kürze halber werde ich auf die Definition der Addition als A0 für $a + 0 = a$ und A1 für $a + b' = (a + b)'$ verweisen.

Die Behauptung ist, daß $m + n = n + m$ für beliebige natürliche Zahlen m, n gilt. Um dies zu zeigen, müssen wir nach P5 zeigen, daß gilt: (I) Die Aussage gilt für $n = 0$ und (II) Wenn die Aussage für n gilt, so gilt sie auch für n'.

Beweis von (I): Verwende abermals vollständige Induktion, diesmal aber über m. Es ist also nach P5 zu zeigen, daß (I.i): Die Aussage gilt für $m = 0$ und (I.ii): Wenn die Aussage für m gilt, so gilt sie auch für m'.

> Beweis von (I.i): $n + m = 0 + 0 = m + n$.
>
> Beweis von (I.ii): $0 + m' = (0 + m)'$ nach A1, $(0 + m)' = (m + 0)'$, da die Aussage für m gelten soll und schließlich $0 + m' = \ldots = (m + 0)' = m' = m' + 0$ nach A0, also gilt $(0 + m = m + 0) \Rightarrow (0 + m' = m' + 0)$.

Hiermit sind beide Bedingungen für P5 gezeigt und die Aussage $0 + m = m + 0$ gilt für alle natürlichen Zahlen m. Also ist (I) bewiesen.

Es folgt der Beweis von (II): Wir setzen voraus, daß $n + m = m + n$ für beliebiges m gilt (*) und es ist zu zeigen, daß daraus $n' + m = m + n'$ für beliebiges m folgt. Hierzu wird abermals Induktion über m verwandt und wir müssen nach P5 folgende Teilaussagen beweisen: (II.i): Die Aussage gilt für $m = 0$ und (II.ii): Wenn die Aussage für m gilt, so gilt sie auch für m'.

> Beweis von (II.i): Es gilt $n' + m = n' + 0 = n'$ nach Einsetzen von m und A0. Wenden wir A0 abermals an, so erhalten wir $n' = (n)' = (n + 0)'$, für das nach Voraussetzung gilt $(n + 0)' = (0 + n)'$ und schließlich nach A1 die Aussage folgt: $n' + 0 = \ldots = (0 + n)' = 0 + n'$.
>
> Beweis von (II.ii): Wir können für diesen Teil des Beweises die Induktionsvoraussetzungen beider Induktionen annehmen. Es gelte also (*) und die Aussage $n' + m = m + n'$ (†). Nach A1 gilt zunächst $n' + m' = (n' + m)'$. Nun wenden wir erst (†) und dann wieder A1 an: $(n' + m)' = (m + n')' = (m + n)''$. Nach (*) und A1 folgt $(m + n)'' = (n + m)'' = (n + m')'$ und nach nochmaliger Anwendung von (*) – da (*) für alle natürlichen Zahlen m gilt und so auch für m' –, $(n + m')' = (m' + n)'$. Ein letztes Ausnutzen von A1 ergibt $n' + m' = \ldots = (m' + n)' = m' + n'$ und damit die gewünschte Aussage $n' + m = m + n' \Rightarrow n' + m' = m' + n'$.

Es sind also beide Bedingungen von P5 erfüllt, so daß für alle natürlichen Zahlen m gilt: $n + m = m + n \Rightarrow n' + m = m + n'$. Also ist auch (II) gezeigt.

Da (I) und (II) gelten, ist P5 auch für die Induktion über n erfüllt und es gilt für alle natürlichen Zahlen n, m: $n + m = m + n$

Nach einem Résumé der Ergebnisse des ersten Kapitels stellt Frege die nächsten Ziele, nämlich die genauere Betrachtung der 1 – Frege spricht noch nicht von der 0 sondern in Anlehnung an Leibniz von der 1 – und der Nachfolgefunktion, vor. Im Gegensatz zu Leibniz will er aber allgemeiner vorgehen, um nicht nur eine Konstruktion der Zahlen sondern auch allgemeine Sätze über sie zu erhalten. § 18

Er verwahrt sich gegen den Versuch, die Zahlen aus geometrischen Überlegungen zu erhalten, da die Anwendungen der Arithmetik weit über das Gebiet der Geometrie hinausgehen und eine solche Konstruktion eine unbefriedigende Charakterisierung der Zahlen zu Folge hätte. (§ 19) Auch die verbreitete Neigung, Zahlen als undefinierbar zu erklären, weist er mit dem Hinweis zurück, daß diese Einstellung lediglich aus dem Scheitern ihrer Vertreter an einer solchen Definition resultiere. Er wird eine solche Definition liefern. (§ 20)

Als nächstes geht Frege der Frage nach, ob „die Anzahl eine Eigenschaft der äußeren Dinge“ ist. Hier widerspricht er der Ansicht, daß sich die Zahlen aus Objekten abstrahieren lassen. Sind die Einheiten, die wir zählen, nicht definiert, so macht die Frage nach dem „wieviel“ keinen Sinn. Die Wahl der Einheiten ist aber willkürlich und keineswegs eindeutig bestimmt, wie z.B. Mill es behauptet. Wir können z.B. dieselben Objekte als *zwei* Schuhe oder auch als *ein* Paar Schuhe betrachten. § 21-25

Frege untermauert seine Ablehnung der Zahl als Eigenschaft äußerer Dinge, indem er auf die bereits in § 8 angedeutete wesentliche größere Anwendbarkeit der Zahlen im Vergleich zu Prädikaten wie denen der Farbe hinweist: Das Zählen läßt sich auf alle Gegenstände, auch abstrakte oder bloß gedachte, anwenden. Man kann diese Überlegung auch umkehren und diejenigen Dinge als ‚Gegenstand‘ definieren, die gezählt werden können. Dann gibt es auch Dinge – wir betrachteten als Beispiel Überzeugungen –, die keine Dinge sind.

Als nächstes verneint Frege die Ansicht, daß die Zahl etwas subjektives sei. Er weist darauf hin, daß zwischen der Zahl und ihrer begrifflichen Bedeutung auf der einen und dem Vorgang des Zählens auf der anderen Seite differenziert werden muß. Er bezeichnet die Zahlen als objektiv, wobei Objektivität für ihn durch die gemeinsam (auf vernünftiger Basis) in Worten faßbaren Aspekte, keinesfalls aber durch die Anschauung oder Vorstellung gegeben ist. Diesen Unterschied zwischen Objektivität und Vorstellung illustriert er sehr schön an dem Dualitätsprinzip für Sätze der projektiven Geometrie.[3] (§ 26) Unter dem Begriff ‚Vorstellung‘ will Frege hierbei stets die subjektive Vorstellung verstanden wissen und kommt folglich zu dem Schluß, daß die Zahlen keine Vorstellungen sein können. Er hat also bis hier gezeigt, daß die Zahlen weder subjektive Vorstellung noch physikalisch sind. (§ 27)

[3]Freges Überlegungen in diesem Paragraphen scheinen mir direkte Konsequenzen aus den drei Grundsätzen zu sein, die er sich am Ende der Einleitung auferlegt hat.

19. Mai Nachdem wir in der letzten Sitzung die Peano-Axiome einführten, kam der Verdacht auf, Frege könne Formalist sein. Das ist nicht der Fall. Für Frege ist es wichtig, nicht bloß Symbole zu manipulieren; die Peano-Axiome sind für ihr wahre Sätze, genau wie die euklidische Geometrie für ihn im Gegensatz zu anderen Geometrien *die* wahre ist. Ebensowenig wie er Formalist ist, ist Frege Konstruktivist: Durch Definitionen zeichen wir lediglich Objekte aus bzw. ordnen sie, wie erschaffen sie dadurch aber nicht.

In einer der vorhergehenden Sitzungen wurde John von Neumanns Realisierung der Konstruktion der natürlichen Zahlen mit Mitteln der Logik vorgestellt. Hierbei definieren wir 0 als die leere Menge, die sich mit logischen Mitteln konstruieren läßt: $0 := \emptyset := \{x|x \neq x\}$. Von der so gewonnenen 0 ausgehend, erhalten wir die nachfolgenden Zahlen: $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $\ldots$, $n' := \{0, 1, \ldots, n\}$. Frege würde von einer solchen Konstruktion Abstand nehmen, obwohl sie seiner Idee entspricht, weil er eine größere Allgemeinheit anstrebt, die durch den hier willkürlich gewählten Weg der Formalisierung nicht möglich ist. Da Frege wie im vorigen Absatz erwähnt kein Konstruktivist ist, würde er sich außerdem auf den Standpunkt stellen, wir hätten lediglich die Zeichen für die Zahlen, nicht aber die Zahlen selbst konstruiert.

Wie schon im Protokoll der vorigen Sitzung notiert, verdeutlicht Frege in § 26 seine Vorstellung von Objektivität am Beispiel der projektiven Geometrie: Es kommt nur darauf an, wie wir kommunizieren, nicht aber darauf, welche Vorstellungen wir mit bestimmten Worten verbinden. Interessant ist, daß Frege hier die projektive Geometrie als Beispiel wählt, obwohl er sie für falsch hält. In § 14 sagt er, andere Geometrien als die euklidische seien immerhin (aber auch nur) zum „begriffliche[n] Denken“ geeignet. Ich fände das von ihm gebrachte Beispiel überzeugender, wenn es aus der ‚richtigen‘ euklidischen Geometrie stammte, da nach dem von Frege gebrachten Beispiel noch nicht ausgeschlossen ist, daß die beiden „Vernunftwesen“ aus Freges Beispiel nur deshalb unterschiedliche Anschauungen zu den Begriffen haben, weil ihre Anschauung in der ‚falschen‘ projektiven Geometrie liegt. Ich möchte Freges These mit dieser Anmerkung keinesfalls in Frage stellen, sondern nur den Verdacht äußern, daß er bei der Wahl des Beispiels sein Augenmerk auf dessen Schönheit und nicht auf dessen Schlagkraft gelegt hat.

Mit dem Abschnitt „Die Anzahl als Menge“ leitet Frege zum dritten Teil § 28
des Buches über. Er stellt die Idee dar, Mengen von Objekten mit Zahlen zu benennen. Hierbei haben viele Autoren übersehen, daß bei oberflächlicher Betrachtung der Zusammenhang zwischen der Menge und der sie benennenden Zahl unklar bleibt. Interessanter als der Ansatz, Mengen beliebiger Gegenstände zu betrachten, erscheint Frege der Ansatz Euklids, Mengen von Einheiten zur Definition der Zahlen zu verwenden. Zunächst möchte er hierzu den Begriff der Einheit klären.

Meinungen über Einheit und Eins

Frege beginnt den Abschnitt damit, zu beleuchten, ob das Zahlwort ‚Ein' eine Eigenschaft von Gegenständen ausdrückt. Zunächst weist er darauf hin, § 29
daß der Begriff ‚Einheit' oder ‚Ein' mehrdeutig ist und die verschiedenen Bedeutungen unterschieden werden müssen. Diese Mehrdeutigkeit, daß ‚Einheit' sich auf *einen* Gegenstand, die *Einheitlichkeit* eines Objekts oder die Zahlenangabe 1 beziehen kann, ist bereits in Euklids Elementen vorhanden.

Den Ansatz, jedes (verschiedenartige) Ding als Einheit aufzufassen und dann die gleichartigen Einheiten zu zählen verwirft Frege schnell, da ihm dieser Zwischenschritt überflüssig erscheint und man gleich die Dinge zählen könnte. Auch die Idee, ‚Einheitsein' als Eigenschaft aufzufassen, die jedem Ding zukommt, verwirft Frege aus demselben Grund. Die Beobachtung der Sprachgewohnheiten, bestärkt Frege in dieser Ansicht.

Bei dem Versuch, Gegenständen ‚Ein' als Eigenschaft beizulegen ent- § 30-33
deckt Frege ein meiner Meinung nach viel wichtigeres Problem: Es hängt von unserem willkürlich gewählten Blickwinkel ab, ob wir demselben Gegenstand (z.B. einem Buch) die Zahl ‚1' (da es *ein* Buch ist) oder ‚146' (da es 146 Seiten hat) zuordnen. Frege deckt auf, daß auch die Definition von ‚Einheit' mittels physikalischer Eigenschaften als ‚Unteilbarkeit' oder begrifflicher Eigenschaften als ‚unzerlegbar Gedachtwerden' ins Absurde führen oder der Willkür unterliegen. Dieses Problem wird für Freges weitere Bemühungen sehr wichtig sein, da er dieses Element der Willkür und Ungenauigkeit in seinem Projekt einer exakten Herleitung der Arithmetik nicht dulden kann.

Während der Diskussion herrschte Uneinigkeit darüber, ob man zwischen ‚Gegenstand' und ‚Einheit' unterscheiden kann und muß oder nicht. Wir haben zusammen mit Frege festgestellt, daß die Entscheidung, ob etwas Einheit ist oder nicht, von unserer Auffassung des betroffenen Objektes abhängt. Diese Abhängigkeit scheint es aber bei Gegenständen nicht zu geben. Folglich wäre ‚Gegenstandsein' ein Prädikat, ‚Einheitsein' aber nicht. Ich kann den Überlegungen bis hier folgen, bin mir aber nicht im Klaren darüber, inwiefern sie für Freges Projekt wichtig sind.

Desweiteren wurde in der Diskussion aufgedeckt, daß wir uns etwas im Konflikt mit dem Leibnizschen Verständnis von Gegenstand befinden: In der vorigen Sitzung wurde festgestellt, daß Gegenstand ist, was gezählt werden kann. Für Frege sind insbesondere Begriffe aber keine Gegenstände[4], sie sind aber trotzdem zählbar, müßten also nach Leibniz Begriffe sein, was zu einem Widerspruch führt. Es konnte – zumindest aus meiner Sicht – keine Klarheit darüber erzielt werden, ob wir diesen Widerspruch dadurch auflösen können, daß wir die Begriffe als Gegenstände zweiter Stufe betrachten. Dieser Schritt geht aber über die Überlegungen Leibniz' hinaus und auch Frege dürfte ihm nicht zustimmen, da er lediglich von „Funktionen, deren

[4] „Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt.", [FuB] S. 30

Argumente Funktionen sind“ und nur „Begriffe erster und zweiter Stufe“[5] vorsieht.

2. Juni Die Paragraphen 34 bis 44 handelten wir sehr schnell ab. Frege zeigt in diesen Paragraphen die Probleme auf, die mit der ungenauen Verwendung von ‚1‘, ‚Einheit‘ und ‚die Eins‘ einhergehen. Auch die Verwechslung der Addition mit dem Hinzufügen des ‚und‘ führt zu Problemen, die Frege aufdeckt. – Aufgrund dieser Ungenauigkeiten entstanden so gegensätzliche § 34-39 Überzeugungen wie die, daß alle Einheiten gleich sind oder die, daß alle Einheiten verschieden sind. Beide Überzeugungen bringen Probleme mit sich, da erstere die Möglichkeit des Gezähltwerdens und das Funktionieren des Hinzufügens fragwürdig erscheinen läßt und letztere verschiedene Spielarten jeder einzelnen Zahl ($1,\ 1',\ 1'',\ldots,\ 2 = 1 + 1',\ 2' = 1 + 1'' \ldots$) zuläßt. Auch den Versuch, die Anzahl zu erhalten, indem man von den Eigenschaften der Dinge absieht, führt nicht zum gewünschten Ziel sondern lediglich zu den Begriffen, unter die die betrachteten Dinge fallen. Obwohl diese Herangehensweise nicht zum gewünschten Ziel führt und deswegen von Frege kritisiert wird, wird er sie in sein entgültiges Modell integrieren können. In § 39 faßt Frege die entdeckten Probleme zusammen und stellt dar, daß man sie bisher wegen des ungenauen Umgangs mit den obengenannten Begriffen übersah.

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden und Lösung der Schwierigkeit

Auch in den in den folgenden Paragraphen dargestellten Lösungsansätzen § 40-44 der „anderen Autoren“ entdeckt Frege Fehler oder Probleme – z.B. mit großen Zahlen. Die dort vorgestellten Lösungsansätze und die mit ihnen einhergehenden Probleme erscheinen mir teilweise etwas konstruiert und für Freges Argumentation überflüssig, sie ebnen aber weiter den Weg zu Freges eigener Lösung.

Diese Lösung bietet unter der Überschrift „Lösung der Schwierigkeit“ § 45 an. Er résumiert zunächst die in den vorhergehenden Paragraphen gesammelten Einsichten über das Wesen der Zahl, insbesondere darüber, was die Zahl *nicht* ist. Da die Zahl keine Eigenschaft von Dingen ist, fragt sich Frege, *wovon* die Zahl eine Eigenschaft ist. Zudem möchte er das willkürliche Element der Auffassung, auf das er bereits in den Paragraphen 22 und 33 hingewiesen hat, ausschalten.

Durch Anwendung des Kontextprinzips, indem er die Verwendung der § 46 Zahlen in der Sprache betrachtet, beantwortet Frege die im vorigen Paragraphen aufgeworfene Frage damit, daß die Zahl Eigenschaft eines Begriffs ist:[6]

[5] beide Zitate [FuB] S. 36

[6] Wie bereits bei den Bemerkungen zu § 38 angedeutet, könnte Frege das Vorgehen einiger „anderer Autoren“ hier sehr gut in sein Konzept integrieren: Die „anderen Autoren“ haben im Prinzip schon einen Schritt in die richtige Richtung getan, indem sie von den

Die Aussage „Der Raum PH133 hat 4 Fenster" ist also eine Aussage über den Begriff ‚Fenster der Raums PH133 sein' und *keine* Aussage über über den Raum PH133 oder dessen Fenster. Auf den Begriff ‚Fenster der Raums PH133 sein' trifft der Begriff ‚4-zahlig sein' zu.

In Anlehnung an [FuB] nennen wir Begriffe, die sich auf Gegenstände beziehen (z.B. ‚Fenster der Raums PH133 sein') *Begriffe erster Stufe* und Begriffe, die sich auf Begriffe erster Stufe beziehen (z.B. ‚4-zahlig sein') *Begriffe zweiter Stufe*. Frege sieht davon ab, von Begriffen höherer Stufen zu sprechen. Ihm ist weiterhin die Unterscheidung zwischen Gegenständen und Begriffen wichtig, obwohl man z.B. die Begriffe erster Stufe als Gegenstände der Begriffe zweiter Stufe betrachten könnte. Für Freges Projekt reichen die von ihm konstruierten Begriffe erster und zweiter Stufe aus, so daß wir uns nicht in eine tiefere Diskussion begeben wollten. Interessant wäre es dennoch, der aufgeworfenen Frage, wie Frege Funktionen bzw. Begriffe zählen würde, nachzugehen.[7]

Durch diese Konstruktion löst sich zugleich das zweite von Frege aufgeworfene Problem, daß die Anzahl von der Auffassung abhänge. Nach [FuB] ist ein Begriff B eine Funktion auf der Menge G der Gegenstände $B : G \longrightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$. Durch die Anzahl der G, die auf ‚wahr' abgebildet werden, ist B eindeutig eine Anzahl gegeben.[8][9]

Nach seinen Vorüberlegungen zu Objektivität und Subjektivität in den Paragraphen 26 bis 28 ist es nun für Frege ein leichtes, den Vorwurf, daß seine Zahlangabe immer noch etwas Subjektives sei, zurückzuweisen. Es reicht ihm, die Sätze auf eine objektive semantische Ebene zu reduzieren und dann zu analysieren. Hierbei scheint er unter ‚objektiv' intersubjektiv zu verstehen, worauf auch sein Verständnis vom Sinn von Begriffen beruht, das keine genaueren erkenntnistheoretischen oder historischen Aspekte beinhaltet. § 47

Eigenschaften der Objekte abstrahierten und zu dem Begriff, unter den die Objekte fallen, gelangten. Ihr Fehler war es vielmehr, ihr Vorgehen falsch zu interpretieren und die entscheidende Tatsache, daß die Anzahl Eigenschaft dieses Begriffes ist, nicht zu erkennen. [§ 48]

[7] Man könnte als Beispiel folgenden Begriff zweiter Stufe betrachten: mit dem Begriff S ‚ist Säugetier' erhalten wir den Begriff zweiter Stufe $C := \{B : \forall x(Bx \rightarrow Sx)\}$, der auf alle Begriffe erster Stufe zutrifft, deren Objekte alle Säugetiere sind. Wie soll diesem Begriff eine Zahl zugeordnet werden?

[8] Auch wenn es für diesen Gedankengang nicht entscheidend sein mag, frage ich mich, wie Frege mit Begriffen umgeht, die auf unendlich viele Objekte zutreffen (z.B. wenn Frege später die Zahlen als Gegenstände einführt, den Begriff ‚ist Zahl'), da wir bisher immer nur von natürlichen Zahlen sprachen.

[9] Ich frage mich, ob Freges Vorgehen wesentlich von dem des von ihm in § 43 kritisierten Schröder abweicht: Schröder bildet die einzelnen Gegenstände auf Einheiten in Form der ‚1' ab. Ein ähnliches Vorgehen finden wir bei Frege wieder, der Begriffe als Abbildungen $B : G \longrightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ denkt. Hier zählen wir diejenigen Gegenstände, die durch den Begriff auf ‚wahr' abgebildet werden. Der Hauptkritikpunkt Freges an Schröder dürfte folglich dessen rein formales Vorgehen sein. Leider ist mir nicht ganz klar, *wo* und *wie* Frege über dieses formale Vorgehen hinausgeht. Da dieser Unterschied für Frege wichtig zu sein scheint, würde ich mich über eine Klärung freuen.

Frege demonstriert, daß sowohl Allaussagen als auch Existenzaussagen keine Aussagen über Dinge sondern Aussagen über Begriffe erster Stufe und somit Begriffe zweiter Stufe sind. Interessanterweise können wir also nichts direkt über die Existenz von Gegenständen aussagen. Wir müssen immer erst einen Begriff konstruieren und dann schauen, wieviele Gegenstände unter diesen Begriff fallen. Insbesondere ist es auch möglich, daß unter einen Begriff keine Objekte fallen. Frege macht deutlich, daß uns eine Definition – also die Nennung eines Begriffs – noch nicht die Existenz von Gegenständen, die unter diesen Begriff fallen, sichert. § 53 § 49

Nachdem Frege nun die Zahlen in ihrem attributiven Gebrauch analysiert hat, weist er – mit Verweis auf die Sprachpraxis – darauf hin, daß Zahlwörter auch eigenständig als Eigennamen der Zahlen verwandt werden. Zusätzlich zu dem bisher erreichten will Frege noch die Zahlen als eigene Gegenstände einführen. Ob dies notwendig ist oder nicht, wird bis heute kontrovers diskutiert. § 50-51

Auch potentiellen Kritikern ist Frege einen Schritt voraus: Er zeigt am Beispiel „vier edle Rosse", daß die Sprache manchmal suggeriert, daß die Zahlen anderen ‚Eigenschaften' gleichgestellt sind. Er fordert daher eine Trennung zwischen *Merkmalen* und *Eigenschaften*. Analysiert man den Ausdruck „vier edle Rosse" unter diesem Gesichtspunkt, so erhalten wir ‚edle Rosse' als Begriff, der verschiedene Merkmale hat (z.B. ‚edel' oder ‚Pferd'). In diesem Beispiel kommt dem Begriff ‚edle Rosse" außerdem die Eigenschaft ‚ist 4-zahlig' zu. § 52

Auf einen anderen Schwachpunkt seines Konzepts weist Frege noch hin: Manche Begriffe wie ‚Wasser' oder ‚Holz' lassen sich nicht zählen, da ihr Objekte nicht aus unterscheidbaren Einzelteilen bestehen. Wir nennen solche Begriffe *nicht-individuativ* und solche, die gezählt werden können *individuativ*. Freges Überlegungen lassen sich nur auf individuative Begriffe anwenden. Allerdings können nicht-individuative Begriffe künstlich – und wieder willkürlich – zählbar gemacht werden, z.B., indem man statt ‚Holz' ‚Stück Holz' betrachtet. § 54

Nachdem Frege die Meinungen „anderer Schriftsteller" widerlegt und seinen eigenen Lösungsvorschlag vorgestellt hat, geht er zum konstruktiven Teil seines Buches über.

Frege bietet zunächst eine genaue Definition des Begriffes ‚ist n-zahlig' an. § 55
In moderner Notation gibt er folgende Definitionen, in denen B ein Begriff sei:

- Auf B trifft der Begriff *ist* 0*-zahlig* zu, wenn gilt: $\forall x(\neg Bx)$.
- Auf B trifft der Begriff *ist* 1*-zahlig* zu, wenn gilt: $\exists x(Bx) \wedge \forall x \forall y((Bx \wedge By) \rightarrow x = y)$.
- Auf B trifft der Begriff *ist* $n+1$*-zahlig* zu, wenn gilt: $\exists x(Bx \wedge [y : By \wedge y \neq x]$ ist n-zahlig)

Freges Definition ist rekursiv, was er im folgenden Paragraphen rechtfertigen wird. Weiterhin ist seine Definition von ‚ist 1-zahlig' überflüssig, da dies nur ein Spezialfall der rekursiven Definition von ‚ist $n + 1$-zahlig' ist.

Zur fregeschen Formulierung der rekursiven Definition reicht die Logik der ersten Stufe nicht aus, da über Begriffe $C_x := [y : By \wedge y \neq x]$ quantisiert wird. Hierfür muß Frege auf die Logik der zweiten Stufe zurückgreifen.

9. Juni Es entsteht der Eindruck, als *erfordere* Freges rekursive Definition von ‚$n + 1$-zahlig' Logik zweiter Stufe. Es ist allerdings möglich, eine Formulierung zu wählen, die mit der Logik der ersten Stufe auskommt und nicht über Prädikate sondern nur über Objekte quantisiert. Hierzu betrachten wir die Quantoren wie im Logikkurs und nicht wie Frege als Begriffe zweiter Stufe. Wir verschaffen uns hierzu Quantoren $\exists_n$ mit der Bedeutung ‚es gibt genau n' und folgen ansonsten Freges Definition:

- $\exists_0 x(Fx) :\Leftrightarrow \forall x(\neg Fx)$
- $\exists_{n+1} x(Fx) :\Leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \exists_n y(Fy \wedge y \neq x))$

Hiermit ist es möglich, sich durch wiederholtes Anwenden der zweiten Definition alle $\exists_n$ als Ausdrücke der Logik erster Stufe zu verschaffen.[10]

Trotz seiner vielversprechenden Definition sieht sich Frege noch nicht § 56

[10]Ein kleiner Versuch zeigte, daß das explizite Hinschreiben zum einem das Verständnis nicht wesentlich fördert und zum anderen sehr lange und unübersichtliche logische Ausdrücke mit sich bringt, denen von $\exists_3$ das Platzangebot einer Tafel eher gerecht wird als das eines Stücks Papier:
Es ist nach Definition $\exists_0 z(Fz) \Leftrightarrow \forall z(\neg Fz)$ und mit $Fz := (Ez \wedge z \neq y)$

$$\begin{aligned} \exists_1 y(Ey) &\Leftrightarrow \exists y\,(Ey \wedge \exists_0 z\,(Ez \wedge z \neq y)) \\ &\Leftrightarrow \exists y\,(Ey \wedge \forall z\,(\neg Fz)) \\ &\Leftrightarrow \exists y\,(Ey \wedge \forall z\,(\neg\,(Ez \wedge z \neq y))) \end{aligned}$$

Als nächstes folgt – diesmal mit $Ey := (Dy \wedge y \neq x)$:

$$\exists_2 x(Dx) \Leftrightarrow \exists x\,(Dx \wedge \exists_1 y\,(Dy \wedge y \neq x))$$

am Ziel angelangt. Neben der schwierigen und hier nicht zur Diskussion stehenden Frage, wie man dann wissen solle, ob Julius Caesar eine Zahl sei oder nicht, stellt Frege fest, daß die Zahl, die einem Begriff zukommt noch nicht wohldefiniert ist. Wir würden gerne folgende Folgerung durchführen:

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ ist } n\text{-zahlig} \\ F \text{ ist } m\text{-zahlig} \end{array}\right\} \Rightarrow (n = m)$$

Damit diese intuitiv einleuchtende Folgerung gemacht werden kann, muß zunächst $(n = m)$ definiert werden. Frege will hierzu die Zahlen als Gegenstände etablieren. (Alternativ könnte man auch eine Gleichheitsrelation für die Zahlbegriffe ‚ist n-zahlig' und ‚ist m-zahlig' definieren, was Frege aber nicht macht, da die Verwendung der Zahlen in der Sprache schon darauf hindeutet, daß die Zahlen auch Gegenstände sind.) Weiterhin muß gesichert sein, daß die Folgerung wirklich möglich sind, also, daß einem Begriff höchstens eine Zahl zukommt.

Frege beobachtet, daß die Zahl nicht selbst Eigenschaft Begriffes, sondern § 57
nur Teil des Zahlbegriffs (als Begriff zweiter Stufe) ist.[11] Hierdurch, durch die Tatsache, daß wir Zahlen mit bestimmten Artikeln verwenden und durch das Auftreten von Zahlen als eigenständige Gegenstände in Gleichungen, fühlt sich Frege in seiner Meinung bestärkt, daß Zahlen Gegenstände sind. Frege möchte nun einen Übergang von der Aussage ‚Der Begriff der Jupitermonde ist 14-zahlig' zu der Gleichung ‚Anzahl der Jupitermonde = 14' schaffen. Die Frage, weshalb dieser Übergang für Frege wichtig ist und weshalb er sich nicht mit den Zahlen als Begriffe zweiter Stufe zufriedengibt, muß vorerst offen bleiben.

Im Anschluß versucht Frege möglichen Mißverständnissen vorzubeugen. Er betont, daß durch dieses Vorgehen der Zahl, die einem Begriff zukommt, keine Eigenschaften des Begriffes zuteilwerden und daß man sich nicht verleiten lassen soll, sich die Zahl vorzustellen, da sie „weder etwas Sinnliches § 58-59

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \exists x\,(Dx \wedge \exists y\,(Ey \wedge \forall\,(z\neg\,(Ez \wedge z \neq y)))) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x\,(Dx \wedge \exists y\,((Dy \wedge y \neq x) \wedge \forall\,(z\neg\,((Dz \wedge z \neq x) \wedge z \neq y)))) \end{aligned}$$

Und um die Unübersichtlichkeit perfekt zu machen, der dritte Streich – mit $Dx := (Cx \wedge x \neq w)$ – und in der Hoffnung, daß sich bei der Überlegung und beim Abschreiben keine Fehler eingeschlichen haben:

$$\begin{aligned} \exists_3 w(Cw) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists w\,(Cw \wedge \exists_2 x\,(Cx \wedge x \neq w)) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists w\,(Cw \wedge (\exists x\,(Dx \wedge \exists y\,((Dy \wedge y \neq x) \wedge \forall\,(z\neg\,((Dz \wedge z \neq x) \wedge z \neq y)))))) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists w\,(Cw \wedge (\exists x\,((Cx \wedge x \neq w) \wedge \exists y\,(((Cy \wedge y \neq w) \wedge y \neq x) \\ &\qquad \wedge \forall\,(z\neg\,(((Cz \wedge z \neq w) \wedge z \neq x) \wedge z \neq y)))))) \end{aligned}$$

[11] Frege sagt: „In dem Satze ‚dem Begriffe F kommt die Zahl 0 zu' ist 0 nur ein Theil des Praedicates, wenn wir als sachliches Subject den Begriff F betrachten." Das könnte meine Vermutung von S. 11 widerlegen, daß Frege die Verwendung höherstufiger Gegenstände ablehnt – vielleicht erscheint ihm die Einführung höherstufiger Gegenstände hier nur als ein zu großer Aufwand.

noch Eigenschaft eines äussern Dinges ist“. Zahlen als Objekte haben außer- § 61
dem keine räumliche Ausdehnung, so daß sie trotz ihrer Existenz an keinen Ort festlegbar sind.

Weiterhin sind die Vorstellungen subjektiv und die Vorstellung muß nicht
dem Inhalt des dazugehörigen Wortes entsprechen. Insbesondere reicht der § 60
Bereich des Denkbaren über den des Vorstellbaren hinaus. Frege wehrt den möglichen Einwand ab, Worte, zu denen wir keine Vorstellung haben, seien inhaltsleer, indem er darauf hinweist, daß es nur wichtig ist, daß die Worte bei ihrer Verwendung in einem Satz eine Bedeutung haben. Dieses Vorgehen ist eine weitere Betonung des Kontextprinzips. Auf die Zahlen angewandt bedeutet es, daß die Zahlwörter einerseits nur im Kontext eines Satzes eine Bedeutung haben, andererseits die Namen von Gegenständen sind.

Äquivalenzrelationen und Definition der Zahl als Äquivalenzklasse

An diese Überlegungen anknüpfend schließt Frege: „Um den Begriff der An- § 62
zahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen“. Um dies zu erreichen, will er die Gleichheit der Zahlen, die zwei Begriffen zukommen formulieren können, ohne dabei auf die Zahlen zurückgreifen zu müssen.

Um dies tun zu können, führt er zunächst am Beispiel paralleler Geraden § 63-68
bzw. der Geradenrichtungen die Idee der Äquivalenzrelation ein. Interessanter als die drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ist hierbei die Beobachtung, daß wir Aussagen über Geraden gleicher Richtung bzw. Parallelität von Geraden treffen können, ohne eine Definition von Richtung zur Verfügung zu haben. Vielmehr können wir so die Richtung einer Geraden als die Klasse aller Geraden, die zu dieser Geraden parallel sind, definieren.

Dieses Vorgehen läßt sich auf den Bereich der Zahlen übertragen, indem die Zahl, die einem Begriff zukommt, als die Klasse aller Begriffe definiert wird, denen dieselbe Zahl zukommt. Hierbei sollen zwei Begriffe ‚gleichzahlig‘ sein, wenn es eine Bijektion zwischen den Gegenständen gibt, die unter die Begriffe fallen. In den folgenden Paragraphen wird Frege eine solche Bijektion mit rein logischen Mitteln konstruieren. Diese Definition der Gleichzahligkeit sichert, daß jedem Begriff höchstens eine Zahl zukommt.

16. Juni Eine weitergehende Betrachtung der Äquivalenzrelationen brachte zusätzliche Erkenntnisse. Obwohl eine Äquivalenzrelation $\sim$ selber kein Gegenstand (sondern ein zweistelliger Begriff) ist und sie nicht notwendig auf Gegenständen definiert ist, sondern – wie im hier betrachteten Fall der Gleichzahligkeit – auch auf Begriffen definiert sein kann, erhalten wir durch die Äquivalenzrelation Gegenstände in Form der *Äquivalenzklassen* $\bar{x} = \{y | y \sim x\}$. Die Elemente von $\bar{x}$ nennen wir Repräsentanten der Klasse. Insbesonde-

re ist wegen der Reflexivitätseigenschaft von $\sim$ $x \in \bar{x}$, also x Repräsentant der Klasse $\bar{x}$.

Dieser etwas ‚sorglose' Umgang mit Mengen zur Definition der Äquivalenzklassen (und auch schon vorher z.B. bei der von Neumannschen Definition der Zahlen) entspricht nicht dem historischen Frege, der die Mengen meidet und stets mit Begriffen, bzw. deren Umfang argumentiert. Freges Vorgehen und Intention scheint hierdurch dennoch getroffen und in moderner Sprache nutzbar zu sein, was daran liegen mag, daß die Mengenlehre zu Freges Zeit weniger etabliert war als es heute der Fall ist.

Nach diesem kleinen Exkurs und ein paar Überlegungen mit der Definition von Äquivalenzrelationen, ergeben sich folgende Aussagen für eine Äquivalenzrelation $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$ und $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$. Da die Gleichzahligkeitsrelation eine Äquivalenzrelation ist[12], gelten diese Aussagen auch für sie und die erste Aussage liefert uns, daß zwei Begriffen F und G dieselbe Zahl zukommt, wenn sie gleichzahlig sind. Die zweite Aussage sichert, daß jedem Begriff F genau eine Zahl, nämlich $\bar{F}$ zukommt.

Wir halten fest, daß Freges Projekt fortschreitet – von der Erkenntnis, daß die Zahl eine Eigenschaft von Begriffen ist in § 42, über das Projekt, die Zahl auch als Gegenstand zu etablieren und der nicht-zirkulären Definition in § 55 gelangen wir schließlich zur Einführung der Äquivalenzrelation ab § 62. Hiermit sind aber noch nicht alle Fragen geklärt: Es bleibt zu zeigen, daß es zu jedem n Begriffe F gibt, so daß $\bar{F} = n$.[13] Frege erwähnt dies am Ende von § 72. Mir ist nicht ganz klar, ob Frege es an dieser Stelle als Definition oder als Behauptung ansieht. Meiner Meinung nach muß die Aussage gezeigt werden. (Auch die Peano-Axiome oder analoges muß Frege noch herleiten, um sein Ziel zu erreichen – doch dazu wahrscheinlich nächstes Mal mehr.)

23. Juni Nach der Einführung von Freges Definition der Zahl als Klasse gleichzahliger Begriffe in den vorigen Sitzungen wurde ein mögliches Problem, das aus dieser Definition hervorgehen kann, besprochen: Gegeben z.B. den Begriff $F = [x : x = 1]$ liegen zwei Beziehungen vor: zum einen trifft F auf 1 zu, d.h. es gilt $F1$, zum anderen ist F selbst ein 1-zahliger Begriff, also liegt der Begriff F im Gegenstand 1 – wir schreiben hierfür in Anlehnung an Boolos (s.u.) $F\eta 1$. In der von uns sonst favorisierten mengentheoretischen Schreibweise wäre F die Menge $\{x|x = 1\}$ sowie $1 = \bar{F}$ und es gälte folglich $\ldots \in 1 \in F \in 1 \in \ldots$. Solche Zustände versucht man in der Mengentheorie zu vermeiden, da sie zu Widersprüchen führen können. Da Frege nicht auf die Mengentheorie zurückgreift, treten sie bei ihm nicht direkt auf. Anhand dieser Überlegung wird abermals klar, daß Frege kein Konstruktivist sein

[12] Das ist einsichtig, wenn man auf die Mengensprache zurückgreift und sagt, zwei Begriffe F und G seien gleichzahlig, wenn es zwischen den Mengen von Gegenständen, die unter F bzw. G fallen eine Bijektion gibt. Frege gibt sich mit weniger formalen Mitteln zufrieden und braucht dementsprechend aufwendigere Argumentationen.

[13] Ich hoffe, diese Notation ist in Ordnung.

kann, weil z.B. die Konstruktion der 1 zirkulär ist und sich nicht vollenden ließe.[14]

Frege stellt auch die kantische Frage, wie uns die Zahlen gegeben sind. Seine Antwort hierauf ist äußerst unkantisch, da für ihn hierzu nicht die Anschauung wichtig ist, sondern die Bedeutung der Zahlwörter. § 62

Es stellte sich erst in diesem Jahrhundert heraus, daß das von Frege genannte Humesche Prinzip, daß $\mathrm{Anzahl}(F) = \mathrm{Anzahl}(G) \Leftrightarrow F \approx G$ (mit der Gleichzahligkeitsrelation $\approx$) zusammen mit der Logik der zweiten Stufe reicht, um Freges Arithmetik herzuleiten. Hierzu muß man nicht auf die allgemeineren Betrachtungen mit Mengen und Äquivalenzrelationen, die wir angestellt haben, zurückgreifen, die diese Aussage in der allgemeineren Form $\bar{F} = \bar{G} \Leftrightarrow F \sim G$ lieferten. § 63

Ein kleiner Exkurs zu G. Boolos Aufsatz „The consistency of Frege's Foundation of Arithmetics" in [FPoM] zeigte, daß die Logik der zweiten Stufe zusammen mit einem weiteren Axiom

Umfangsgleichheit $\forall F \exists! x \forall G\, (G \eta x \Leftrightarrow \forall y\, (Fy \Leftrightarrow Gx))$

zu einem Widerspruch, z.B. bei der Betrachtung des Begriffs $[y : \exists G(G\eta y \wedge \neg Gy)]$, führt. Dieser Widerspruch wurde von Russell entdeckt und von Frege auch sofort eingesehen. Was Frege nicht sah, aber Boolos in seinem Aufsatz zeigt, ist, daß sich mit dem etwas weniger allgemeinen Axiom

Gleichzahligkeit $\forall F \exists! x \forall G (G\eta x \Leftrightarrow F \approx G)$

kein Widerspruch ergibt. Dieses Axiom sichert, daß es zu jedem Begriff F einen eindeutigen Gegenstand x gibt, in dem alle Begriffe G liegen, die zu F gleichzahlig sind. Das ist alles, was Frege für seine Arithmetik braucht.

Ob Frege mit dieser Lösung glücklich wäre, ist eine andere Frage, da sie zwar sichert, daß er die Zahlen als Gegenstände gewinnt, aber nicht seinem Anspruch gerecht wird, rein logisch zu sein: Das Axiom ‚Umfangsgleichheit' scheint in höherem Maße logisch zu sein als das Axiom ‚Gleichzahligkeit', da es ohne $\approx$ auskommt. Da ‚Umfangsgleichheit' aber nicht zur Logik gehört (weil es ja auf einen Widerspruch führt) kann auch ‚Gleichzahligkeit' nicht rein logisch sein. Hiermit wäre das Hauptanliegen Freges gescheitert.

Ich bin mir nicht sicher, ob die soeben dargestellte Argumentation funktioniert, da ja noch gezeigt werden kann – was Frege auch versucht –, daß $\approx$ sich mit rein logischen Mitteln darstellen läßt. Ob es dann noch sinnvoll ist, davon zu sprechen, daß ein Ausdruck ‚in höherem Maße logisch' als ein anderer ist, erscheint mir fragwürdig.

Nach diesem kleinen Exkurs und Freges Definition „die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig mit F'." in § 68, möchte Frege mögliche Bedenken gegenüber dieser Definition § 69
ausräumen. Die Definition der Zahl als Klasse gleichzahliger Begriffe scheint

[14] siehe auch das Protokoll vom 19. Mai

zuzulassen, daß verschiedene Zahlen echt ineinander enthalten sind, also, daß mit zwei Begriffen F und G und den dazugehörigen Zahlen $\bar{F}$ und $\bar{G}$, $\bar{F} \subset \bar{G}$ bzw. $\bar{G} \subset \bar{F}$ gelten könne. Nach den in der vorigen Sitzung gezeigten Aussagen über Äquivalenzrelationen kann dieser Fall aber nicht auftreten, da aus $F \in \bar{F} \subset \bar{G}$ folgt, daß auch $F \in \bar{G}$ und damit $\bar{F} \cap \bar{G} \neq \emptyset$ gilt, was $\bar{F} = \bar{G}$ impliziert. Dieses Problem ist also nur ein scheinbares. Dennoch kann es vorkommen, daß Der Umfang eines Begriffes echt in einer Zahl enthalten ist. Dieser Begriffsumfang kann dann nach der vorigen Überlegung keine Zahl sein. Auch wenn sie zunächst ungewöhnlich wirken, läßt Frege solche Zustände zu, da sie seine Überlegungen nicht berühren und nicht zu Widersprüchen führen.

30. Juni Schließlich formalisiert Frege die zuvor motivierten Idee der Gleichzahligkeit mit Hilfe einer zweistelligen Relation φ erster Stufe und der Definition, § 71
daß zwei Begriffe F, G erster Stufe *einander durch φ zugeordnet* sind, wenn

$$\forall x(Fx \Rightarrow \exists y\,(Gy \wedge x\varphi y)\,) \wedge \forall x(Gx \Rightarrow \exists y\,(Fy \wedge y\varphi x)\,)$$ [15]

Hiermit definiert Frege erneut die Relation der *Gleichzahligkeit.* Es gilt § 72
$F \approx G$ genau dann, wenn es eine zweistellige Relation φ gibt, so daß F und G einander durch φ zugeordnet sind und daß gilt:

$$\forall a \forall d \forall e(\,(d\varphi a \wedge d\varphi e) \Rightarrow a = e) \wedge \forall a \forall b \forall d(\,(d\varphi a \wedge b\varphi a) \Rightarrow d = b)$$

Weiterhin erhalten wir so die *Anzahl eines Begriffes* durch Anzahl(F) := Umfang des Begriffs $[X : X \approx F]$ und nennen einen Gegenstand *Anzahl*, wenn gilt: $\exists X(n = \text{Anzahl}(X))$. An dieser Stelle kommt die bereits am Anfang des Seminars angekündigte Logik zweiter Stufe zum Vorschein, da über Begriffe (also Prädikate) quantisiert wird. Frege beweist noch, daß wirklich § 73
$\text{Anzahl}(F) = \text{Anzahl}(G) \Leftrightarrow F \approx G$ gilt, worauf wir wegen unserer allgemeinen Überlegungen zu Äquivalenzrelationen im Rahmen von § 63 nicht näher eingingen.[16]

Hiermit definiert Frege: $0 := \text{Anzahl}\,([x : x \neq x])$. An Stelle des Begriffes § 74
$[x : x \neq x]$ hätte Frege auch jeden anderen Begriff, dessen Umfang leer ist, verwenden können. Da er nur auf die Mittel der Logik zurückgreifen möchte, findet dieser sehr einfache Begriff Verwendung.[17] Es bietet sich auch ein Vergleich mit der von Neumannschen Definition auf der Grundlage von Mengen

[15] Hieraus folgt sofort, daß der Umfang von G leer ist, wenn der Umfang von F leer ist und F und G durch φ einander zugeordnet sind: Angenommen, der Umfang von G sei nicht leer. Folglich gibt es ein z, so daß Gz gilt. Da F und G einander durch φ zugeordnet sind, folgt insbesondere $\exists y(Fy)$, was im Widerspruch zur Voraussetzung, daß der Umfang von F leer sei, steht. Also ist der Umfang von G auch leer.

[16] siehe auch Protokolle vom 16. und 23. Juni

[17] Sollte sich jemand an der Verwendung der Identiät zur Definition des Begriffs stören, so kann bemerkt werden, daß wir die Identität mit Hilfe der Logik der zweiten Stufe als $(x = y) :\Leftrightarrow (\forall F(Fx \leftrightarrow Fy))$ definieren können. Nach ein paar einfachen logischen Umformungen kann dann anstelle des Begriffs $[x : x \neq y]$ der Begriff $[x : \exists F(Fx \wedge \neg Fx)]$ zur Definition der 0 verwandt werden.

an: Während die Idee beider Zahldefinitionen dieselbe zu sein scheint, sind die entstehenden Zahlen ganz unterschiedlich. Es ist (in Mengenschreibweise):

$$0_F = \text{Anzahl}\left([x : x \neq x]\right) = \{F : F \approx [x : x \neq x]\} \neq \emptyset = \{x | x \neq x\} = 0_N$$

In diesem Zusammenhang wurden zwei weitere interessante Erkenntnisse von Boolos genannt: Zum einen ist die Betrachtung von Anzahl($[x : x$ ist endliche Anzahl$]$) oder Anzahl($[x : x = x]$) ungefährlich, zum anderen stellte Boolos fest, daß in Freges System nicht festgestellt werden kann, ob diese beiden Gegenstände gleich oder voneinander verschieden sind.

Als nächstes widmet sich Frege der *Nachfolger- bzw. Vorgängerrelation.*[18] § 76
Er definiert, daß n unmittelbar auf m folgt, wenn

$$\exists F \exists x \Big(Fx \wedge (\text{Anzahl}(F) = n) \wedge (\text{Anzahl}\left([y : Fy \wedge (y \neq x)]\right) = m) \Big)$$

Frege betont hierbei sogleich, daß Eindeutigkeit des Nachfolgers und dessen Existenz noch gezeigt werden müssen. Er stellt fest, daß sich Nachfolger § 77
leicht konstruieren lassen: $1 := \text{Anzahl}\left([x : x = 0]\right)$, $2 := \text{Anzahl}([x : (x = 0) \vee (x = 1)])$, $\ldots$. Auch hiermit gibt er sich noch nicht zufrieden, sondern möchte auch die durch ‚…‘ angedeutete Fortsetzung des Prozesses formalisieren.

Als nächstes präsentiert Frege einige Folgerungen aus den bisher genann- § 78
ten Definitionen. Hierbei kommte er u.a. zu den Ergebnissen, daß für den Fall, daß n unmittelbarer Nachfolger von m ist, diese Beziehung in beide Richtungen eindeutig ist und, daß jede Anzahl außer der 0 in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf eine Anzahl folgt.

Nach der Definition des direkten Nachfolgens in einer φ-Reihe, definiert § 79
Frege nun mit einer zweistelligen Relation φ, daß *y in der φ-Reihe auf x folgt*, wenn

$$\forall F \Big(\underbrace{\forall c (c\varphi x \Rightarrow Fc)}_{\alpha} \wedge \underbrace{(\forall d \forall e \left((Fd \wedge e\varphi d) \Rightarrow Fe\right))}_{\beta} \Rightarrow Fy \Big)$$

Da diese Form der Darstellung sehr abstrakt ist, kann man zum besseren Verständnis das allgemeine φ durch ‚ist direkter Nachfolger von‘ ersetzen. Die Definition dieses Zusammenhangs wird von einigen Personen abgelehnt, da hier zur Definition eines Begriffs über alle Begriffe – also auch den Begriff selbst – quantisiert wird. Damit ist dieses Vorgehen abermals nicht konstruktiv, sondern Frege ordnet lediglich bereits vorhandene Gegenstände.[19]

Eine interessante im Seminar offengebliebene Frage war, wie gezeigt werden kann, daß $\aleph_0$ kein Teil der natürlichen Zahlenreihe ist. Um dies zu tun,

[18] Mir scheint, als würde Frege in diesem Zusammenhang den Begriff der „natürlichen Zahlenreihe“ ohne weitere Definition einführen. Weiterhin scheint es für ihn klar zu sein, daß es in dieser Reihe so etwas wie „benachbarte Glieder“ gibt.

[19] siehe auch Protokolle vom 19. Mai und 23. Juni

muß ein Begriff gefunden werden, so daß der Ausdruck aus der Definition aus § 78 für alle x aus der natürlichen Zahlenreihe nicht erfüllt ist.

Eine Diskussion mit Moritz Wiethaup führte uns zu der Idee, daß der Begriff $[x : \neg(x\varphi x)]$ diese Eigenschaft hat: Für alle x aus der natürlichen Zahlenreihe trifft α zu, da die Teile der natürlichen Zahlenreihe nicht zyklisch sind wie Frege in § 83 bemerkt. Weiterhin ist diese Eigenschaft auch auf alle anderen Mitglieder der natürlichen Zahlenreihe vererblich, so daß auch β gilt. Folgte $\aleph_0$ also auf ein x aus der natürlichen Zahlenreihe, so müßte $[x : \neg(x\varphi x)]\aleph_0$ also $\neg(\aleph_0\varphi\aleph_0)$ gelten, was zu einem Widerspruch führt.

Es muß also nur noch in Freges System gezeigt werden, daß $\aleph_0\varphi\aleph_0$ gilt. Wie dies vonstatten geht, hängt von der Definition von $\aleph_0$ ab. Meines Erachtens liegt es hier nahe, $\aleph_0 :=$ Anzahl($[x : x$ ist Mitglied der natürlichen Zahlenreihe$]$) zu definieren. Zum Beweis müßte man Begriffe in der Art $[x : x$ ist Mitglied der natürlichen Zahlenreihe $\wedge x \neq 0]$ bemühen, um den Vorgänger von $\aleph_0$ zu erhalten. Dieser steht nach § 87▷5 in einem eineindeutigen Verhältnis zu seinem Nachfolger. Es bleibt zu zeigen, daß die Umfänge beider Begriffe in Bijektion stehen, was durch eine Abbildung nach Art von ‚Hilberts Hotel' geschehen kann. Eine genaue Ausbuchstabierung in Freges komplizierter Sprache möchte ich mir an dieser Stelle ersparen.

Literatur

[GdA] Frege, Gottlob. Die Grundlagen der Arithmetik – eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988.

[FuB] Frege, Gottlob. Funktion und Begriff. in: Günther Patzig (Hg.). Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien, S. 18-39, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 7. Auflage, 1994.

[FPoM] Demopoulos, William (Hg.). Frege's Philosophy of Mathematics, Harvard University Press, 1995