Hintergrundinformationen zum einführenden Vortrag über
speziell Lagrangesche Geometrie
Sven-S. Porst, April 2002

Strukturen Symplektische Strukturen ω, (beinahe) komplexe Strukturen J, sowie innere Produkte $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und hermitische Strukturen h werden verwandt und es ist hilfreich die Beziehungen

$$g(v,w) = \omega(v,Jw) \qquad \text{und} \qquad h(v,w) = g(v,w) + i\omega(v,w)$$

zwischen diesen Strukturen sowie die dazugehörigen strukturerhaltenden Gruppen

Struktur	ω	g	J	h
Gruppe	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{O}(2n)$	$\mathrm{Gl}(n,\mathbf{C})$	$\mathrm{U}(n)$

und die Zusammenhänge

$$\mathrm{Sp}(n)\cap\mathrm{Gl}(n,\mathbf{C}) \;=\; \mathrm{Sp}(n)\cap\mathrm{O}(2n) \;=\; \mathrm{O}(2n)\cap\mathrm{Gl}(n,\mathbf{C}) \;=\; \mathrm{U}(n)$$

zwischen diesen im Kopf zu haben.

Lagrangesche Unterräume Die Überlegungen im Vortrag beginnen mit der Betrachtung Lagrangescher Unterräume eines $2n$-dimensionalen symplektischen Vektorraums (V,ω) mit komplexer Struktur J.

Die einfachste Definition hierfür nennt einen Unterraum $W \subset V$ *Lagrangesch*, wenn $W^\omega = W$ gilt, wobei W^ω das *symplektische Komplement* $\{v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$ bezeichnet. Diese Definition ist äquivalent zu der Forderung, daß W n-dimensional sei und $\omega_{|W} = 0$ gelte. Einen anschaulicheren Zugang ermöglicht die Berechnung

$$0 = g(Jv,\cdot)_{|W} = \omega(Jv,J\cdot)_{|W} = \omega(v,\cdot)_{|W},$$

die zeigt, daß W Lagrangesch ist, wenn für alle $w \in W$ $Jw \perp W$ gilt, W gewissermaßen orthogonal zur komplexen Struktur ist. Das impliziert insbesondere, daß eine Orthogonalbasis eines Lagrangeschen Unterraums W ebenfalls unitäre Basis von V, aufgefaßt als komplexer Vektorraum, ist.

Wir bezeichnen die Menge der orientierten Lagrangeschen Unterräume von $\mathbf{C}^n$ mit der gewöhnlichen komplexen und symplektischen Struktur mit $\mathrm{Lag}(n)$ und sehen, daß für beliebiges $U \in \mathrm{U}(n)$

$$\omega(U(W),U(W)) = \mathrm{Im}\; h(U(W),U(W)) = \mathrm{Im}\; h(W,W) = \omega(W,W) = 0$$

gilt und somit $\mathrm{U}(n)\times\mathrm{Lag}(n) \to \mathrm{Lag}(n)$, $(U,W) \mapsto U(W)$ eine Gruppenwirkung definiert. Diese Gruppenwirkung ist transitiv und hat an der Stelle $\mathbf{R}^n \times 0$ die Isotropiegruppe

$$\mathrm{U}(n)_{\mathbf{R}^n\times 0} = \{U \in \mathrm{U}(n) | U(\mathbf{R}^n \times 0) = \mathbf{R}^n \times 0\} = \mathrm{SO}(n).$$

Hierbei wirkt $\mathrm{SO}(n)$ als Untergruppe von $\mathrm{U}(n)$ diagonal auf $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ und wir erhalten

$$\mathrm{Lag}(n) \simeq \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n).$$

Ein Element $U \in \mathrm{U}(n)$ repräsentiert hierbei den Lagrangeschen Unterraum $U(\mathbf{R}^n \times 0)$ mit der gewöhnlichen, von $\mathbf{R}^n$ stammenden, Orientierung.

Poissonklammern Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) und differenzierbare Funktionen F, G auf M, dann ist durch die symplektische Struktur eine Poissonklammer $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$ gegeben, wobei X_H mit $\iota_{X_H}\omega = dH$ das zu H gehörende (Hamiltonsche) Vektorfeld ist. In Koordinaten ist

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial y_j} - \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} \right) = 2i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial G}{\partial z_j} - \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

Symplektische Reduktion Zur Auffrischung noch eine Zusammenfassung der symplektischen Reduktion. Gegeben sei eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω), auf der eine Lie-Gruppe G durch Symplektomorphismen wirkt, sowie eine Ad^*-äquivariante Impulsabbildung $\mu : M \to \mathbf{g}^*$.

Für einen regulären Wert τ von μ ist dann $\mu^{-1}(\tau)$ eine Untermannigfaltigkeit und wegen der Ad^*-Äquivarianz operiert die Isotropiegruppe G_τ auf diesem Urbild. Ist diese Operation gutartig, so ist der Quotient $\mu^{-1}(\tau)/G_\tau = M//_\tau G$ wieder eine symplektische Mannigfaltigkeit mit symplektischer Struktur $\omega^\tau_{[m]}([v], [w]) = \omega_m(v, w)$.