Seminar Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen

Dozent: Victor Pidstrygach

Gebiet: Geometrie

Vorkenntnisse: Diff, AGLA, Funktionentheorie

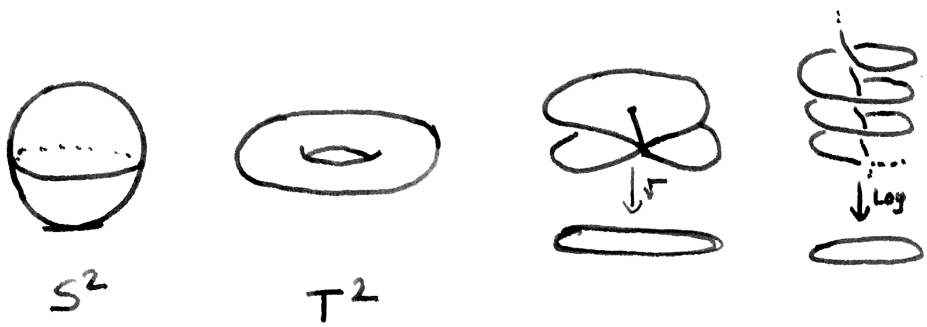
Vorbesprechung: Dienstag, 13.7. 14 Uhr im Maximum

Termin: verhandelbar, evtl. Dienstags 14 Uhr.

Fragen an: Sven-S. Porst, ssp@uni-math.gwdg.de, Tel: 39-7751, Zi 016

Inhalt

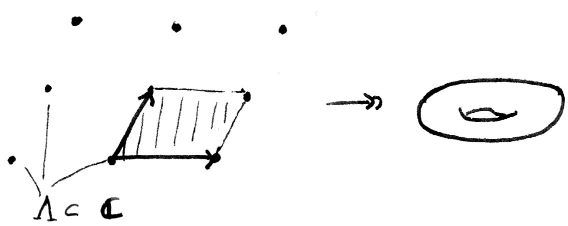
Riemannsche Flächen sind Gebilde, die *lokal* genau wie die komplexe Zahlenebene aussehen. Insbesondere läßt sich auf ihnen der Begriff der holomorphen Abbildung definieren. Beispiele sind die Riemannsche Sphäre $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = S^2 = \mathbf{CP}^1$ oder der Torus T^2.



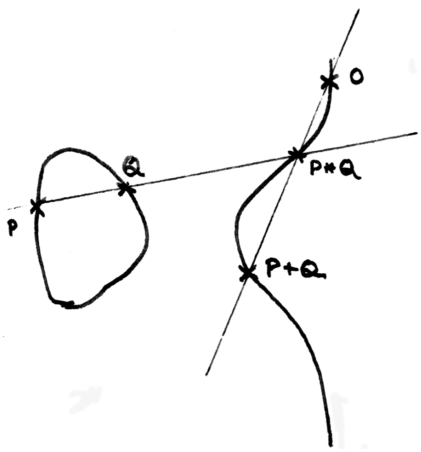
Algebraische Kurven sind Nullstellenmengen von Polynomen in zwei Unbekannten. Sei zum Beispiel $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, dann ist die dazugehörigen reelle Nullstellenmenge $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | P(x, y) = 0\}$ die bekannte Kreiskurve. Sind die Variablen komplex, erhalten wir entsprechend komplexe Kurven, die uns Beispiele für Riemannsche Flächen liefern.

Da die Kurven algebraisch gegeben sind, können sie gut untersucht werden. So werden wir zum Beispiel mit dem Satz von Bézout die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven bestimmen können.

Besonders viele schöne Eigenschaften haben nichtausgeartete Kurven vom Grad 3, sogenannte *Kubiken.* Im Laufe des Seminars werden wir sehen, daß sie topologisch Tori sind und so als Quotient $\mathbf{C}/\Lambda$ der komplexen Ebene mit einem 2-dimensionalen Gitter Λ beschrieben werden können. Während die so erhaltenen Tori für alle Gitter homöomorph, also topologisch gleich, sind, tragen sie in Abhängigkeit vom Gitter unterschiedliche Holomorphiebegriffe.



Als ein solcher Quotient $\mathbf{C}/\Lambda$ aufgefaßt können sie als Definitionsbereich für doppelt periodische Funktionen auf $\mathbf{C}$, sogenannte *elliptische Funktionen* dienen. Deshalb werden sie auch *elliptische Kurven* genannt. Die sehr geometrische Gruppenstruktur, die wir auf ihnen finden werden, wird in der Kryptographie verwandt.



Im letzten Drittel des Seminars werden wir die Jacobische einer Riemannschen Fläche kennenlernen und den wichtigen Satz von Riemann-Roch zeigen. Dadurch sind dann die Grundsteine für eventuelle spätere Arbeiten auf diesem Gebiet gelegt.

Seminarplan

	Inhalte	Literatur
1.	Affiner und projektiver Raum, affine und projektive algebraische Kurven.	K2, G I.1,I.8
2.	Schnitte von Kurven, (Kleiner) Satz von Bézout, Anwendung: Satz von Pascal.	K3-3.17
3.	Schnittmultiplizität, Satz von Bézout.	K3.17-
4.	Wendepunkte, Normalform für Kubiken, Gruppenstruktur auf einer Kubik.	K3.2
5.	Topologie, Grad-Geschlecht Formel, verzweigte Überlagerungen.	K4 (ohne 4.2)
6.	Riemannsche Flächen, Karten, Komplexe Mannigfaltigkeiten, Beispiele.	G I.2 + ?
7.	Abbildungen Riemannscher Flächen, holomorphe und meromorphe Funktionen und Differentiale.	G I.3-5
8.	Komplexe Tori.	?
9.	Elliptische Kurven, elliptische Funktionen, Weierstraßsche $\wp$-Funktion, Einbettung elliptischer Kurve in $\mathbf{CP}^2$	K5.1 FB5
10.	Satz von Abel, Periodenmatrix, Abel-Jacobi Abbildung, Jacobische.	G V.1
11.	Satz von Riemann-Roch I	K6.3, G III.5
12.	Satz von Riemann-Roch II	K6.3, G III.5
13.	Anwendungen des Satzes von Riemann-Roch	G IV

Literatur

Hauptquellen:

K: Frances Kirwan. *Complex algebraic curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

G: Phillip A. Griffiths. *Introduction to algebraic curves*, volume 76 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. Translated from the Chinese by Kuniko Weltin.

Eventuell hilfreich:

C. G. Gibson. *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998 – Einfache Einführung, um einen Überblick zu gewinnen. §16 Linearsysteme, §17 Gruppenstruktur auf Kubik.

Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988 – §2 für Gruppenstruktur auf elliptischen Kurven.

Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993 – Kapitel 5 über elliptische Funktionen.

Eberhard Freitag and Rolf Busam. Funktionentheorie ii. Vorläufige Version des 2. Bandes, http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/ t91/skripten/FunktionentheorieII/ – Kapitel 1 über Riemannsche Flächen, Kapitel 4 über kompakte.

Weiterführend:

V. I. Danilov and V. V. Shokurov. *Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*. Springer-Verlag, Berlin, 1998 – Umfangreiche und gute Darstellung aber ohne Beweise.

C. Herbert Clemens. *A scrapbook of complex curve theory*, volume 55 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003 – Knappe Darstellung.