Der Satz von Poncelet

von Abel Stolz

Januar 2006

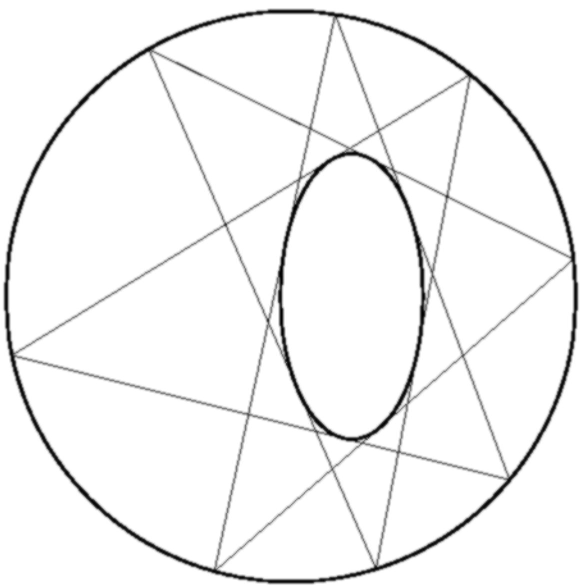

Abbildung 1.

Satz 1. [Poncelet] *Seien c, d zwei Ellipsen in $\mathbb{R}^2$, so dass c im Inneren von d liegt. Sei P_0 ein Punkt aus d. Es existiert genau dann ein Polygon mit P_0 als Eckpunkt, dessen Kanten tangential zu c sind und dessen Eckpunkte auf d liegen, wenn es zu jedem Punkt R_0 aus d solch ein Polygon gibt, das R_0 als Eckpunkt hat. Hat eines der Polygone n Eckpunkte, so hat jedes andere auch n Ecken. (Die Kanten der Polygone dürfen sich dabei überschneiden.)*

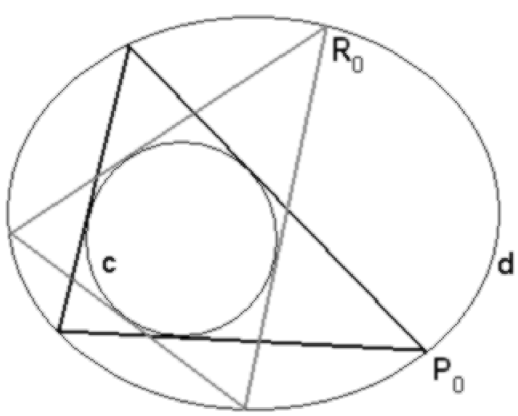

Abbildung 2.

Wir wollen das Problem erweitern und in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ über den komplexen Zahlen betrachten. Sei also $c = V(p)$ mit $p \in \mathbb{R}[x_1,\ x_2]$ eine Ellipse in der affinen Ebene $\mathbb{C}^2$. Eine Ellipse c' in der affinen Ebene ist in Normalform gegeben durch die Gleichung

$$c' = V\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right).$$

Durch Hauptachsentransformation erhalten wir eine symmetrische und reguläre 2×2-Matrix A', die c auf c' abbildet. Die affine Ebene identifizieren wir nun mit $\mathbb{C}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{C}^3$.

Sei $Q' := \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{b^2} & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

Dann beschreibt die Gleichung $(Q'x|x) = 0$ einen Kegel in $\mathbb{C}^3$. Der Schnitt dieses Kegels mit der Ebene $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$ ist offensichtlich genau c'.

Sei $A := \begin{pmatrix} A' & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

Dann sieht man, dass die Gleichung $(Q'Ax|Ax) = 0$ einen Kegel beschreibt, dessen Schnitt mit $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$ gleich c ist. Definiere jetzt $Q = (q_{\mathrm{ij}})_{1 \leq i,j \leq 3} := A^T Q' A$. Dann folgt, dass für die Punkte $x \in c$ gilt

$$(Qx|x) = (A^T Q' A x|x) = (Q' A x|Ax) = 0.$$

Wir erhalten also mit homogenen Koordinaten
$x = [x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2$ eine Quadrik C in $\mathbb{P}^2$, die durch

$$(Qx|x) = \sum_{i,j=1}^{3} q_{\mathrm{ij}} x_i x_j = 0$$

beschrieben wird. Diese Quadrik wollen wir im Folgenden statt der ursprünglichen Ellipse c betrachten.

Bemerkung 2. Die Matrix $Q = (q_{\mathrm{ij}})_{1 \leq i,j \leq 3}$ ist nach Konstruktion symmetrisch und nicht singulär.

Lemma 3. *Die Quadrik C ist genau dann glatt, wenn die Matrix Q nicht singulär ist.*

Beweis. C heißt glatt im Punkt x, genau dann wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x$, $i = 1, 2, 3$ nicht alle gleich 0 sind, wobei Φ die Abbildung $x \mapsto (Qx|x)$ ist.

$$\begin{aligned}
D\Phi(x) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}x, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}x, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}x\right) \\
&= (2q_{11}x_1 + (q_{12} + q_{21})x_2 + (q_{13} + q_{31})x_3, \\
&\quad (q_{12} + q_{21})x_1 + 2q_{22}x_2 + (q_{23} + q_{32})x_3, \\
&\quad (q_{13} + q_{31})x_1 + (q_{23} + q_{32})x_2 + 2q_{33}x_3) \\
&= (q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3, q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3, \\
&\quad q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3) \\
&\quad + (q_{11}x_1 + q_{21}x_2 + q_{31}x_3, q_{12}x_1 + q_{22}x_2 + q_{32}x_3, \\
&\quad q_{13}x_1 + q_{23}x_2 + q_{33}x_3) \\
&= Qx + Q^T x = 2Qx,
\end{aligned}$$

da Q symmetrisch ist.

Der obige Ausdruck ist bei einem nicht singulären Q gleich $(0, 0, 0)$, genau dann wenn $x = 0$ ist. Der Nullpunkt gehört aber nicht zur projektiven Ebene. Wenn Q nicht singulär ist, ist also C glatt. Ist Q singulär, so ist $\dim(\mathrm{Ker}(Q)) > 0$ und damit gibt es ein $x \neq 0$ mit $Qx = 0$, $2Qx = 0$ und $(Qx|x) = 0$, d.h. $\langle x\rangle \in C$ singulär. $\square$

Im Folgenden werden wir den Raum $(\mathbb{P}^2)^*$ aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{P}^2$ betrachten. Dieser Raum lässt sich auch als der Raum aller Linearformen auf $\mathbb{P}^2$ interpretieren, da jede Linearform einen eindimensionalen Unterraum, eine Gerade beschreibt. Wir werden beide Betrachtungsweisen benutzen.

Definition 4.

$$C^* := \{L \in (\mathbb{P}^2)^* | \exists P \in C \colon L \,\mathrm{ist\ Tangente\ an}\, C \,\mathrm{durch}\, P\}$$

heißt die zu C duale Kurve.

Sei $P \in C$ mit den Koordinaten $p = [p_1 \colon p_2 \colon p_3]$ gegeben, dann besteht die Tangente $T_{C,P}$ an C durch P aus den Punkten $y = [y_1 \colon y_2 \colon y_3]$, für die gilt

$$0 = \sum \frac{\partial}{\partial x_j}(Qp|p) y_j.$$

Folgerung 5.

$$0 = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(Qp|p) y_j = \sum_j \Big(\sum_i p_i q_{\mathrm{ji}}\Big) y_j = (Qp|y)$$

Wenn nun $\xi = [\xi_1 \colon \xi_2 \colon \xi_3]$ Koordinaten im dualen Raum $\mathbb{P}^{2*}$ sind, wobei wir $(\mathbb{P}^2)^*$ als den Raum der Linearformen auf $\mathbb{P}^2$ auffassen, wird also $T_{C,P}$ mit dem Punkt $\xi = Qp$ identifiziert. Für die Punkte aus C gilt

$$0 = (Qp|p) = (Qp|Q^{-1}Qp) = (\xi|Q^{-1}\xi).$$

Folglich wird die duale Kurve C^* durch die Gleichung $(Q^{-1}\xi|\xi) = 0$ beschrieben, ist also eine Quadrik. Man sieht so auch, dass $C = C^{**}$ ist, und dass C^* glatt ist.

Bemerkung 6. Als komplexe algebraische Kurven sind C, C^* auch Riemannsche Flächen. Insbesondere ist das Geschlecht $g(C) = g(C^*) = 0$ und damit sind C, C^* isomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$.

Der Satz von Bézout sagt uns, dass jede Gerade in $\mathbb{P}^2$ die Kurve C in genau zwei Punkten schneidet (mit Vielfachheit gezählt), da C eine Kurve zweiten Grades ist.

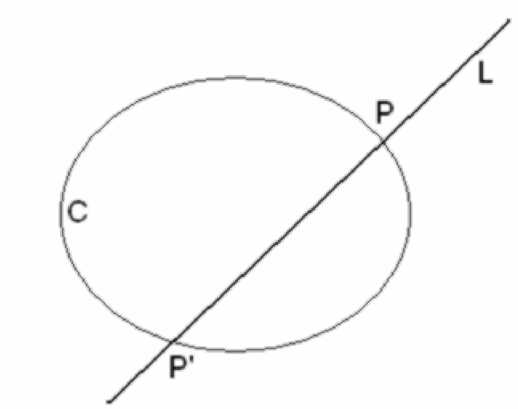

Abbildung 3.

Folgerung 7. *Durch Dualisieren der Situation erhält man, dass es zu jedem Punkt $P \in \mathbb{P}^2$ zwei Tangenten an C gibt. P ist ein Punkt in $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^2)^{**}$, lässt sich also als Gerade in $(\mathbb{P}^2)^*$ auffassen. C^* wird aber von jeder Geraden P aus $(\mathbb{P}^2)^*$ in zwei Punkten L, L' geschnitten. L, L' sind dann die gesuchten Tangenten an C. Diese werden natürlich auch mit Vielfachheit gezählt, d.h. für $P \in C$ ist die Tangente $T_{C,P}$ durch P eine "doppelte" Tangente.*

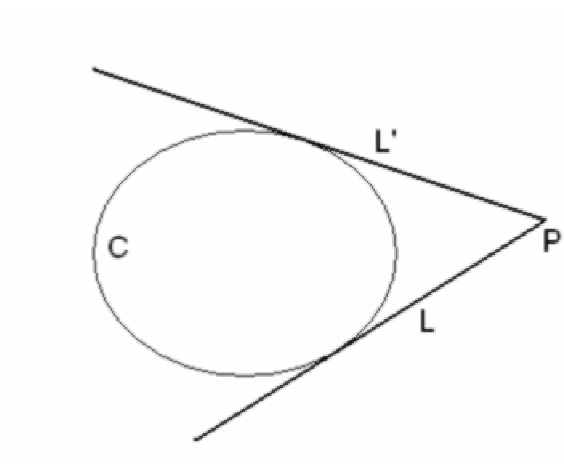

Abbildung 4.

Lemma 8. *Sei nun $D \subset \mathbb{P}^2$ eine weitere Quadrik. Dann schneiden sich C und D in 4 Punkten mit Vielfachheit gezählt.*

Beweis. Sowohl D als auch C sind algebraische Kurven zweiten Grades. D und C sind nicht die gleiche Quadrik und enthalten keine Geraden, sie haben also keine gemeinsamen Komponenten. Nach dem Satz von Bézout folgt, dass sie sich in $2 \cdot 2 = 4$ Punkten schneiden. □

Folgerung 9. *Seien C, D so gewählt, dass sie sich in vier paarweise verschiedenen Punkten schneiden. Dann schneiden sich auch C^* und D^* in vier paarweise verschieden Punkten mit jeweils Vielfachheit 1.*

Beweis. Angenommen C^* und D^* schneiden sich in einem Punkt mit Vielfachheit ≥ 2. Dann hätten C und D eine gemeinsame Tangente L. Ausserdem hätten C^* und D^*

eine gemeinsame Tangente $P \in C^{**} \cap D^{**} = C \cap D$. Das bedeutet aber, dass die Tangente L durch P verläuft, dass sich also C und D in P mit Vielfachheit 2 schneiden. $\square$

Folgerung 10. *Wenn $\#(C \cap D) = 4$ ist, sich also C und D in vier paarweise verschiedenen Punkten schneiden, sind C und D nirgends tangential zueinander.*

Anmerkung 11. Im Folgenden wollen wir uns auf den Fall beschränken, dass eben dies der Fall ist, dass sich die Quadriken C und D in vier paarweise verschiedenen Punkten transversal schneiden. Die vier anderen Fälle sind ungleich komplizierter als der hier behandelte, bringen aber keine neuen Resultate. In zwei Fällen ist sogar die Konstruktion eines Polygons überhaupt nicht möglich. Erwähnung finden diese weiteren Fälle zum Beispiel in [BKOR], S. 327, 7.12. und S. 329, 7.14.

Wir definieren nun eine Teilmenge $E \subset (D \times C^*) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ als Paare von Punkten $P \in D$ und Tangenten $L \in C^*$, so dass $P \in L$ ist, d.h.

$$E := \{(P, L) \in (D \times C^*) | P \in L\}.$$

Lemma 12. *E ist eine zweifache Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ mit vier Verzweigungspunkten.*

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\rho: E \to D, (P, L) \mapsto P.$$

Es ist zu zeigen, dass ρ lokal ein Homöomorphismus ist. Zunächst stellen wir fest, dass die Verzweigungspunkte die vier Punkte $P \in C \cap D$ sind, da es in diesen Punkten nur eine Tangente an C gibt, also $\#(\rho^{-1}(P)) = 1$ ist für $P \in C \cap D$. ρ ist die Einschränkung der Projektion von $D \times C^* \rightarrow D$ auf E und folglich stetig offen und surjektiv. Es bleibt zu zeigen, dass ρ lokal injektiv ist. Sei d eine von einer Metrik auf $D \times C^*$ induzierte Metrik auf E. Sei (P_0, L_0) ein beliebiger fester Punkt aus E mit $P_0 \notin C \cap D$, d.h. kein Verzweigungspunkt und U eine Umgebung davon, so dass $\bar{U} \cap ((C \cap D) \times C^*) = \varnothing$ ist. Sei dann

$$\delta := \inf(\{d((P, L), (P, L')) | (P, L), (P, L') \in U, L \neq L'\}).$$

Es ist $\delta > 0$, da ansonsten ein Punkt aus $(C \cap D) \times C^*$ im Rand von U läge. Nun ist es aber klar, dass ρ auf dem Ball $B_\delta((P_0,\ L_0))$ injektiv ist. Außerdem sehen wir so, dass immer zwei Punkte auf einen Punkt geworfen werden, falls $P \notin C \cap D$ ist (da dann D von der Tangente L in zwei Punkten geschnitten wird). Hieraus folgern wir, dass E eine zweifache verzweigte Überlagerung der Riemannschen Zahlkugel $\mathbb{P}^1 \cong C$ ist. □

Lemma 13. *E ist elliptisch.*

Beweis. Da E eine doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ ist, gilt für die Eulercharakteristik $\chi(E)$ von E die Gleichung

$$\chi(E) = 2\chi(\mathbb{P}^1) - 4.$$

Dabei ist 4 die Anzahl der Verzweigungspunkte. Da die Eulercharakteristik von $\mathbb{P}^1$ gleich 2 ist, folgt sofort $\chi(E)$=0. Weiterhin gilt für E als algebraische Kurve die Formel

$$\chi(E) = 2 - 2g(E),$$

wobei g das Geschlecht der Kurve ist. Wir sehen also, dass das Geschlecht $g(E)$ von E gleich 1 ist.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass E elliptisch ist.

(Die Rechnung ist im wesentlichen eine Anwendung der Hurwitz-Formel, [H], S. 301, Thm. 2.4) $\square$

Wir definieren nun zwei Involutionen $\gamma\colon E \to E$ und $\delta\colon E \to E$ durch

$$\begin{aligned} \gamma(P,L) &= (P',L) \\ \delta(P,L) &= (P,L'), \end{aligned}$$

wobei P' der weitere Punkt ist, in dem D von L geschnitten wird, und L' die weitere Tangente an C durch P ist. Falls $L \in C^* \cap D^*$, so ist $P = P'$, wenn $P \in C \cap D$, dann ist $L = L'$.

Die Fixpunkte von γ sind die Punkte $(P,\, L)$ mit $P = P'$, d.h. $L \in C^* \cap D^*$, da diese Tangenten D nur in einem Punkt schneiden.

Die Fixpunkte von δ sind dementsprechend die Punkte $(P,$ $L)$ mit $L = L'$, d.h. $P \in C \cap D$, da es bei diesen Punkten nur eine Tangente an C gibt.

Wir halten nun einen Punkt $(P_0,\, L_0) \in E$ fest. Abhängig von diesem Punkt definieren wir weitere Punkte $(P_n, L_n) := \delta \circ \gamma(P_{n-1}, L_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge diese Punkte nennen wir

$$\Pi(P_0, P_0) := \{(P_i, L_i) | i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

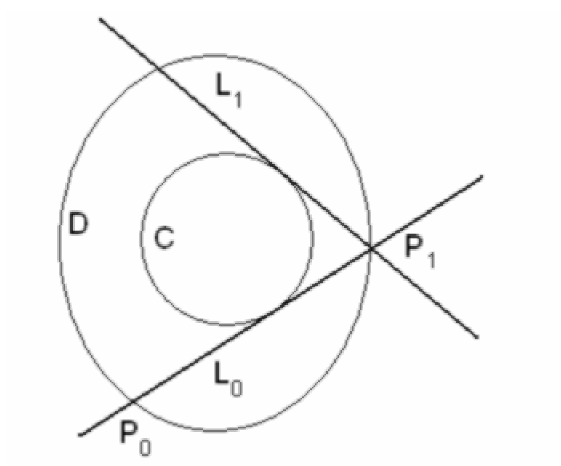

Abbildung 5.

Offenbar beschreiben die Geraden $\{L_i \,|\, 0 \leq i \leq n-1\}$ ein (geschlossenes) Polygon, falls $(P_0, L_0) = (P_n, L_n)$ für ein n. Die Kanten dieses Polygons sind nach Konstruktion tangential zu C und die Eckpunkte liegen in D. Es gilt also für $\alpha := \delta \circ \gamma$, dass $\alpha(P_i, L_i) = (P_{i+1}, L_{i+1})$ ist. Induktiv erhält man, dass

$$\alpha^n(P_0, L_0) = (P_n, L_n).$$

Man sieht sofort, dass $\Pi(P_0,\ L_0)$ genau dann endlich ist, wenn $\alpha^n(P_0, L_0) = (P_0, L_0)$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$. Das Problem besteht nun also darin, Fixpunkte von α^n auf E zu finden.

Satz 14. [Poncelet] *Seien C und D zwei Quadriken in $\mathbb{P}^2$. Sei P_0 ein Punkt aus D und L_0 eine Tangente an C, die D in P_0 schneidet, derart, dass $\#\Pi(P_0, L_0) = n$ ist, für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\#\Pi(R_0, K_0) = n$ für jeden Punkt $R_0 \in D$, mit einer Tangente K_0 an C durch R_0.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass α selbst keine Fixpunkte hat, da sich die Fixpunkte von γ von denen von δ unterscheiden. Da E eine elliptische Kurve ist, trägt diese eine Gruppenstruktur. Sei $+$ die Gruppenoperation auf E zu dem neutralen Element $0 \in E$.

Es wird nun behauptet, dass ein $t \in E$ existiert, so dass $\alpha(x) = x + t$ für alle $x \in E$.

Da E elliptische Kurve ist, existiert ein analytischer Isomorphismus $E \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, der E als Riemannsche Fläche isomorph zu einem Torus macht. Dabei ist Λ das Periodengitter des Torus. Die universelle Überlagerung von E ist $\mathbb{C}$. Folglich werden die bijektiven Abbildungen γ und δ von Automorphismen γ' bzw. δ' auf der universellen Überlagerung induziert. Diese haben als Automorphismen von $\mathbb{C}$ die Form $\gamma'(z) = a\,z + t$ bzw. $\delta'(z) = a'z + t'$ für ein $a, t \in \mathbb{C}$ bzw. $a', t' \in \mathbb{C}$.

Da $\gamma^2 = 1$ ist, muss $\gamma'^2(z) = a^2 z + (a+1)t = z + \lambda$ sein, wobei $\lambda \in \Lambda$ ist.

Es folgt, dass $a = \pm\, 1$ ist. Wäre allerdings $a = 1$, so folgte für einen Fixpunkt z_0 von γ' aus $\gamma'(z_0) = z_0$, dass $t \equiv 0 \bmod \Lambda$ ist, und damit $\gamma = i\, d_E$. Das ist offensichtlich nicht der Fall und wir erhalten $a = -\,1$. Genauso stellen wir fest, dass $\delta'(z) = -\,z + t'$ ist. Wenn wir nun $\alpha' := \delta' \circ \gamma'$ nennen, sieht man, dass $\alpha'(z) = z + (t' - t)$ ist. Es gibt also ein festes $\tau \in E$, so dass α die Form $\alpha(x) = x + \tau$ hat für alle $x \in E$ mit einem geigneten $\tau \in E$. $\tau = t' - t \,(\mathrm{mod}\,\Lambda)$.

Nehmen wir nun an, dass für einen Punkt $(P_0,\, L_0) \in E$ $\#\Pi(P_0,\, L_0) = n$ ist. Wir hatten gesehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn gilt $\alpha^n(P_0, L_0) = (P_0, L_0)$.

Für ein beliebiges $x \in E$ gilt nun aber $a(x) = x + \tau$, wobei τ unabhängig von x ist.

Wenn wir nun $x = (P_0, L_0)$ wählen, können wir aus $x + n\tau = \alpha^n(P_0, L_0) = (P_0, L_0) = x$ folgern, dass $n\tau = 0$ ist. Sei nun $y = (R_0, K_0) \in E$ ein beliebiger weiterer Punkt, also $R_0 \in D$ und $K_0 \in C^*$. Dann ist

$$(R_n, K_n) = \alpha^n(R_0, K_0) = \alpha^n(y) = y + n\tau = y = (R_0, K_0).$$

Das bedeutet gerade, dass $\#\Pi(R_0,\ K_0) = n$ ist, also tatsächlich ein Polygon bildet. $\square$

Literatur:

- [BKOR] H.J.M. Bos, C. Kers, F. Oort, D.W. Raven, *Poncelet's closure theorem*, Expositiones Math. 5 (1987), 289-364

- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *A Poncelet theorem in space*, Comment. Math. Helvetici 52 (1977), 145-160

- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977)