

**ALGEBRAISCHE KURVEN UND
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

DOMINIK WULF

Seminar "Geometrie von Algebraischen Kurven und Flächen"

1. EINLEITUNG

1.1. **Thema.** Dieser Vortrag beschäftigt sich mit der Verwendung algebraischer Kurven zur Lösung von Differentialgleichungen.

Um die Vorgehensweise zu illustrieren wird ein konkretes Beispiel behandelt: eine Lösung des klassischen Problems eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt in einem konstanten Gravitationsfeld bewegt, wird hergeleitet. Man spricht in diesem Fall auch von einem *spinning top* (drehender Kreisel).

Es gibt mit der Theorie der Integrierte Systeme eine relativ neue mathematische Anwendung, in der algebraische Kurven eine wesentliche Rolle spielen, die zur Lösung von Systemen von Differentialgleichungen genutzt werden kann. Diese Theorie wird aber am Ende des Vortrags nur durch einen kurzen Ausblick dargestellt.

1.2. **Beispiele.** Vorweg einige Beispiele von Bewegungen starrer Körper um einen festen Punkt:

- (1) Eine Kugel dreht sich um ihren Mittelpunkt. Dies ist wahrscheinlich einer der einfachsten Fälle, aber man kann sich hier schon sehr schön die grundlegenden Prinzipien klarmachen.
- (2) Ein Zylinder rotiert um sein Massezentrum. Dies ist ein anschauliches Beispiel für einen asymmetrischen Körper, wobei die momentane Drehachse für die Bewegung entscheidend ist.

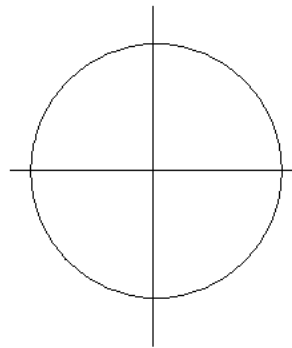


ABBILDUNG 1. Kugel

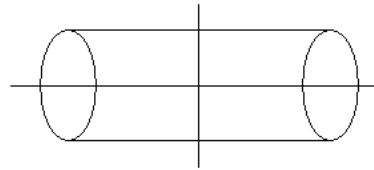


ABBILDUNG 2. Zylinder

2. BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS UM EINEN FESTEN PUNKT

2.1. **Beschreibung des Problems.** Zunächst sollte geklärt werden, was mit den Begriffen „starrer Körper“ und „fester Punkt“ gemeint ist.

Die Bezeichnung *starrer Körper* bedeutet gerade, dass Verformungen und Teilchenbewegungen innerhalb des Körpers vernachlässigt werden.

Wir betrachten also nun die Bewegung eines starren Körpers um einen *festen Punkt* O , das heißt dieser Punkt bleibt stets an einer festen Position im Raum.

Seien A und B zwei voneinander und von O verschiedene Punkte des Körpers, so dass O , A und B nicht kollinear sind. A und B mögen also durch eine Bewegung bei der O fest bleibt in die Punkte A' und B' überführt werden. Danach ist nun die Position des gesamten Körpers festgelegt, denn durch die Punkte O , A' und B' ist die neue Position aller Punkte bestimmt, da die zugehörige Abbildung wegen der Starrheit des Körpers isometrisch ist.

Wir machen uns klar, dass die Beschreibung der Bewegung durch Betrachtung eines einzelnen Punktes A allein nicht ausreichen würde, da die Drehung um die Achse durch O und A noch einen weiteren Freiheitsgrad darstellt, der nur durch die Lage eines weiteren Punktes B eingeschränkt wird.

Insbesondere stellen wir weiter fest, dass sich alle Punkte auf Sphären um den Punkt O bewegen, da der Abstand von O immer konstant bleibt.

Daher spricht man in diesem Fall auch von einer *sphärischen Bewegung* des Körpers.

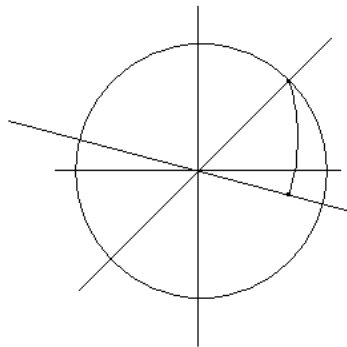


ABBILDUNG 3. Bewegung auf einer Sphäre

Wenn wir nun die eigentliche Bewegung vernachlässigen und nur die Lage der Punkte A und B sowie A' und B' betrachten, so ist klar, dass sich die Bewegung des Körpers durch eine *Rotation* R um eine feste Achse durch O darstellen läßt.

Wir fassen zusammen:

2.2. **Satz.** (Eulersches Theorem) Eine Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt O ist durch eine Rotation $R \in SO(3)$ gegeben.

2.3. **Anschauliche Beschreibung der Differentialgleichung.** Dass sich die Lage des Körpers nur zum Anfangs- und Endpunkt der Bewegung beschreiben läßt ist jedoch etwas unbefriedigend.

Die eigentliche Bewegung kann aber aus einer größeren Anzahl von Rotationen zusammengesetzt werden, dabei ändert sich auch jeweils entsprechend die Drehachse.

Wenn jetzt also die Anzahl der betrachteten Rotationen unbeschränkt zunimmt, um die eigentliche Bewegung des Körpers zu beschreiben, dann verändern sich zeitlich die momentane Drehachse sowie die Drehbewegung selbst. Der „glatte Verlauf“ dieser Übergänge erzeugt somit eine *Differentialgleichung*, die sowohl Lage und Impuls als auch Drehgeschwindigkeit des Körpers berücksichtigen muss.

2.4. **Absolute Bewegung des Körpers.** Es stellt sich die Frage, wie man dieses Problem darstellen kann.

Im Wesentlichen benutzen wir dazu zwei Koordinatensysteme, ein *relatives System*, das heißt relativ zur Bewegung des Körpers, und ein *absolutes System*, das am Anfang mit dem relativen übereinstimmt. Dabei haben beide ihren Ursprung in O . Relative Vektoren werden im Folgenden mit Groß- und absolute mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

$R(t)$ sei die Rotation des relativen Systems in Abhängigkeit der Zeit t aus Sicht des absoluten Systems. Dann erhält man für die Bewegung eines Punktes Q des Körpers $q(t) = R(t)Q$. Damit ist die Ableitung dieses Ausdrucks nach t nun

$$\dot{q} = \dot{R}Q = (\dot{R}R^{-1})q .$$

Wir wollen im Folgenden die Struktur des Raumes der Rotationen eines Körpers als *Lie-Gruppe* genauer untersuchen, insbesondere dessen *Lie-Algebra*. Dabei werden wir uns unter anderem die wichtige Bedeutung von $\dot{R}R^{-1}$ klarmachen.

2.5. **Satz.** Die Rotationsmatrizen $SO(n)$ bilden eine Lie-Gruppe.

Beweis. Die $SO(3)$ ist eine Gruppe, also bleibt zu zeigen, dass $SO(3)$ auch eine Mannigfaltigkeit ist.

Wir betrachten die Abbildung von den reellen $n \times n$ -Matrizen in die symmetrischen $n \times n$ -Matrizen

$$\Phi : M(n) \rightarrow S(n), A \mapsto A^t A .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X}\Phi(A) &= \frac{d}{d\lambda}\Phi(A + \lambda X)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}((A^t + \lambda X^t)(A + \lambda X))|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}(A^t A + \lambda(X^t A + A^t X) + \lambda^2(X^t X))|_{\lambda=0} \\ &= 0 + (X^t A + A^t X) + 2\lambda(X^t X)|_{\lambda=0} = X^t A + A^t X .\end{aligned}$$

Und für jedes $A \in GL(3)$ existiert zu gegebenem $B \in S(3)$ ein $X := \frac{1}{2}(A^t)^{-1}B$, so dass $\frac{\partial}{\partial X}\Phi(A) = B$. Folglich ist Φ eine Submersion und $O(n) = \Phi^{-1}(\{I\})$ eine Untermannigfaltigkeit der $GL(n)$ ($\cong \mathbb{R}^{n^2}$).

Mit $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} = O(n) \cap \{\det^{-1}(1)\}$ ist also auch $SO(n)$ als offene Teilmenge der $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit. □

2.6. Satz. Der Vektorraum der reellen antisymmetrischen 3×3 -Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^t = -A\}$ ist isomorph zu \mathbb{R}^3 .

Dieser Isomorphismus wird im Weiteren mit φ bezeichnet.

Beweis. Aus $A^t = -A$ folgt für die Einträge von A die Beziehung $a_{j,i} = -a_{i,j}$, also sind die antisymmetrischen Matrizen im \mathbb{R}^3 gerade von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

und man erhält den Isomorphismus $\varphi : A \mapsto (x, y, z)^t$. □

Folgerung 1. Damit läßt sich die Wirkung einer antisymmetrischen Matrix als Vektorprodukt darstellen, da man durch kurze Rechnung in Komponenten sieht, dass

$$A \cdot (u, v, w)^t = \varphi(A) \times (u, v, w)^t \quad \forall (u, v, w)^t \in \mathbb{R}^3 .$$

Folgerung 2. Für zwei antisymmetrische Matrizen A und B rechnet man ebenso in Komponenten nach, dass sich deren Kommutator, die durch die Lie-Klammer $[,]$ dargestellt, unter φ auch als Vektorprodukt schreiben läßt.

Es ist

$$\varphi([A, B]) = \varphi(AB - BA) = \varphi(A) \times \varphi(B) .$$

2.7. Satz. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ zur Lie-Gruppe $SO(3)$ ist der Vektorraum der reellen antisymmetrischen 3×3 -Matrizen mit dem Vektorprodukt als Lie-Klammer.

Beweis. Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe ist der Tangentialraum des Einselements und somit die lineare Approximation der Gruppenkonjugation.

Sei $A(t) \in SO(3)$ mit $A(0) = I$, also $\det(A) = 1$ und $AA^t = I$. Wir berechnen nun das Differential für $t = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} I|_{t=0} = \frac{d}{dt} AA^t|_{t=0} = \dot{A}A^t(0) + A(0)\dot{A}^t = 0 \\ &\Rightarrow \dot{A}I + I\dot{A}^t = \dot{A} + \dot{A}^t = 0 \Rightarrow \dot{A}^t = -\dot{A}. \end{aligned}$$

Folglich ist \dot{A} antisymmetrisch.

Aus dem vorherigen Satz wissen wir, dass der Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen auch die Dimension $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ hat. Damit muss Gleichheit gelten.

Das Vektorprodukt auf dem \mathbb{R}^3 ist nach *Folgerung 2* eine bilineare, antisymmetrische Abbildung, die die Jacobi-Identität erfüllt. Also ist das Vektorprodukt eine Lie-Klammer auf $\mathfrak{so}(3)$. □

2.8. Satz. $\dot{R}R^{-1}$ ist antisymmetrisch.

Beweis. Wie wir bereits gesehen haben ist $R \in SO(3)$ und $\dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$, somit gilt $\det(R) = 1$, $RR^t = I$, das heißt $R^t = R^{-1}$ sowie $\dot{R}^t = -\dot{R}$. Also

$$0 = \frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt} RR^t = \dot{R}R^t + R\dot{R}^t \Rightarrow \dot{R}R^t - R\dot{R} = 0 \Rightarrow \dot{R}R^t = R\dot{R}.$$

Mit $(R\dot{R})^t = \dot{R}^t R^t = -\dot{R}R^t$ gilt

$$\dot{R}R^t = ((R\dot{R})^t)^t \Rightarrow \dot{R}R^t = (-\dot{R}R^t)^t \Rightarrow (\dot{R}R^{-1})^t = -(\dot{R}R^{-1}).$$
□

Folgerung. Die Matrix $\dot{R}R^{-1}$ ist als Vektor $\omega(t) = \varphi(\dot{R}R^{-1})$ darstellbar. Also

$$\dot{q} = \omega \times q.$$

Bemerkung. Physikalisch ist $\omega(t)$ die *Winkelgeschwindigkeit* des Körpers.

Die Winkelgeschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit bei einer linearen Bewegung. Sie gibt an um welchen Winkel sich der Körper zeitabhängig dreht und ist damit im Gegensatz zur Geschwindigkeit in einem Punkt unabhängig von der Entfernung von O .

Nebenrechnung. Aus $R^{-1} = R^t$ und der Antisymmetrie von $\dot{R}R^{-1} = \dot{R}R^t$ sowie \dot{R} folgt

$$(\dot{R}R^t)^t = -\dot{R}R^t \Rightarrow R\dot{R}^t = -\dot{R}R^t \Rightarrow R^t R \dot{R}^t R = -R^t \dot{R} R^t R.$$

Mit $RR^t = I$ also

$$\dot{R}^t R = -R^t \dot{R}. \quad (*)$$

2.9. Relative Bewegung des Gravitationsfeldes. Um der realen Situation näherzukommen, ist es nun interessant den Einfluß von *Gravitation* auf das System zu untersuchen.

Wir gehen dabei stets von einem konstanten Gravitationsfeld γ aus. Das heißt dieses ist ein konstanter Vektor im absoluten System, aber im relativen System eine von der Bewegung des Körpers abhängige Größe. Es läßt sich darstellen als

$$\Gamma(t) = R(t)^{-1}\gamma = R(t)^t\gamma .$$

Unter Verwendung der Definitionen $\Gamma = R^{-1}\gamma = R^t\gamma$ und $\Omega = R^{-1}\omega = R^t\omega$ sowie der Identifizierung $\omega = \dot{R}R^t$ durch φ mit der Darstellung als Vektorprodukt (Lemma 2.6, *Folgerung 1*) gilt somit für die Ableitung von Γ nach t

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{R}^t\gamma = \dot{R}^t R\Gamma \stackrel{(*)}{=} -R^t \dot{R}\Gamma \\ &= -R^t(\dot{R}R^t\gamma) = -R^t(\omega \times \gamma) = R^t(\gamma \times \omega) \\ &= (R^t\gamma) \times (R^t\omega) . \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega . \tag{1}$$

2.10. Impuls des Körpers. Bis jetzt ist noch nicht auf die Masse des Körpers eingegangen worden. Deren Auswirkung während der Bewegung wollen wir im Folgenden feststellen.

Sei q ein Punkt der *Masse* μ , dann beträgt sein *Drehimpuls*

$$m_q = \mu_q q \times \dot{q} = \mu q \times (\omega \times q) .$$

Damit ist der Drehmoment des gesamten Körpers m die Summe der Drehimpulse aller Punkten mit Masse, im relativen System dann

$$M = \sum_q \mu_q Q \times (\Omega \times Q) .$$

Andererseits läßt sich die Situation auch durch Wirkung eines Operators in Abhängigkeit von Ω darstellen, denn mit $M = \mathcal{J}\Omega$ lautet die i -te Komponente von M :

$$\begin{aligned}
M_i &= \left(\sum_q \mu_q Q \times (\Omega \times Q) \right)_i = \sum_q \mu_q \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} Q_j \varepsilon_{k,l,m} \Omega_l Q_m \right) \\
&= \sum_q \mu_q \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{k,i,j} \varepsilon_{k,l,m} Q_j \Omega_l Q_m \right) = \sum_q \mu_q \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 (\delta_{i,l} \delta_{j,m} - \delta_{i,m} \delta_{j,l}) Q_j \Omega_l Q_m \right) \\
&= \sum_q \mu_q \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 (\delta_{i,l} \delta_{j,m} Q_j \Omega_l Q_m - \delta_{i,m} \delta_{j,l} Q_j \Omega_l Q_m) \right) \\
&= \sum_q \mu_q \left(\sum_{j=1}^3 Q_j \Omega_i Q_j - Q_j \Omega_j Q_i \right) = \sum_q \mu_q \left(\sum_{j=1}^3 Q^2 \Omega_i - Q_i Q_j \Omega_j \right) \\
&= \sum_q \mu_q \left(\sum_{j=1}^3 Q_i^2 \delta_{i,j} \Omega - Q_i Q_j \right) \Omega_j =: \sum_{j=1}^3 \mathcal{J}_{i,j} \Omega_j .
\end{aligned}$$

Dabei ist $\delta_{i,j}$ das *Kronecker-Symbol* und $\varepsilon_{i,j,k}$ das *Levi-Civita-Symbol*.

2.11. Satz. \mathcal{J} ist symmetrisch und konstant.

Beweis. Per Definition ist \mathcal{J} konstant, da der Körper starr ist und man hat sofort $\mathcal{J}_{i,j} = \sum_q \mu Q_i^2 \delta_{i,j} \Omega - Q_i Q_j = \mathcal{J}_{j,i}$, denn dieser Ausdruck ist offensichtlich symmetrisch in i und j . □

Folgerung. Nach dem Spektralsatz aus der linearen Algebra läßt sich \mathcal{J} bezüglich einer geeigneten Basis als Diagonalmatrix darstellen, wobei die *Eigenwerte* auf der Diagonalen stehen.

Bemerkung. Physikalisch ist \mathcal{J} der *Trägheitstensor*, (sehr) anschaulich wird dadurch die äußere Form des Körpers beschrieben.

Der Trägheitstensor repräsentiert, dass unsymmetrische Körper für verschiedene Richtungen verschiedene Trägheitsmomente aufweisen, das heißt in manche Richtungen lassen sich bestimmte Körper einfacher Drehen als in andere.

2.12. Äußere Kräfte. Nun stellt sich noch die Frage, welche Auswirkungen äußere Kräfte auf den gemittelten (Dreh-)Impuls M des Körpers haben.

Wir stellen fest, dass die zeitliche Veränderung von $m = RM$, das heißt die Ableitung von m nach t , gleich der Summe $n = RN$ aller Impulse der Kräfte sein muss, die auf den Körper wirken. Es gilt daher $RN = n = \dot{m} = (R\dot{M})$, also

$$RN = (R\dot{M}) = \dot{R}M + R\dot{M} .$$

Mit Satz 2.6, *Folgerung 1* gilt nach der Definition von $\omega = \varphi(\dot{R}R^{-1})$

$$\dot{R}M = \dot{R}R^{-1}m = \omega \times m = R\Omega \times RM = R(\Omega \times M)$$

und damit $RN = \dot{R}M + R\dot{M} = R(\Omega \times M) + R\dot{M} \Rightarrow N = \Omega \times M + \dot{M}$
 $\Rightarrow \dot{M} = -\Omega \times M + N = M \times \Omega + N .$

Die Wirkung der Kräfte setzt nur an Punkten mit Masse an, folglich muss gerade noch deren Abstand zu O berücksichtigt werden.
 Zur Vereinfachung gehen wir in unseren Fall von nur einem *Massepunkt* aus.

Sei also G das *Massezentrum* des Körpers, dann ist $L = \overrightarrow{OG}$ ein konstanter Vektor im relativen System. Da in unserem Fall die einzige wirkende Kraft die Gravitation im Punkt G ist, folgt damit für die Veränderung des Impulses $N = \Gamma \times L$.
 Also erhalten wir

$$\dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times L . \quad (2)$$

2.13. Die Differentialgleichung. Die wesentlichen Gleichungen des Problems haben wir nun hergeleitet, diese wollen wir nun noch geeignet formulieren.

Die Gleichungen (1) und (2) bilden das System der *Euler-Poisson Gleichungen*, das es zu lösen gilt:

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega \\ \dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times L \end{cases}$$

Um noch weiter zu vereinfachen, nehmen wir eine Bewegung um den Massepunkt des Körpers an, und bekommen so mit $O = G$ nun $L = 0$.
 Das heißt wir haben jetzt einen starren Körper, der sich um sein Massezentrum dreht. Für Gleichung (2) bedeutet das $\Gamma \times L = 0$.

Wie wir bereits gesehen haben, kann man jetzt noch die Vektorprodukte durch Lie-Klammern antisymmetrischer Matrizen ersetzen, denn nach Satz 2.6, *Folgerung 2* gilt: $\varphi^{-1}(\varphi(A) \times \varphi(B)) = [A, B] = AB - BA$. Wir identifizieren dabei einen Vektor $\varphi(A)$ mit der Matrix A , bzw. eine Matrix $\varphi^{-1}((u, v, w)^t)$ mit dem Vektor $(u, v, w)^t$.

Somit haben wir nun insgesamt

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega] \\ \dot{M} = [M, \Omega] \end{cases}$$

2.14. Lösung der Differentialgleichung. Die Lösung von (1) folgt direkt aus der Lösung von (2). Betrachten wir also

$$\dot{M} = [M, \Omega] = M \times \Omega = \mathcal{J}\Omega \times \Omega ,$$

wobei wir einfach M und Ω mit $\varphi(M)$ und $\varphi(\Omega)$ identifizieren.

Nach der *Folgerung* aus Satz 2.11 ist bezüglich einer geeigneten Basis M in Komponenten gegeben durch $M_i = (\mathcal{J}\Omega)_i = \lambda_i \Omega_i$, wobei λ_i ($i = 1, 2, 3$) die Eigenwerte von \mathcal{J} sind.

Damit lautet die Gleichung (2) komponentenweise:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{\Omega}_1 = (\lambda_3 - \lambda_2) \Omega_2 \Omega_3 \\ \lambda_2 \dot{\Omega}_2 = (\lambda_1 - \lambda_3) \Omega_3 \Omega_1 \\ \lambda_3 \dot{\Omega}_3 = (\lambda_2 - \lambda_1) \Omega_1 \Omega_2 \end{cases}$$

Nach geeigneter Normierung betrachten wir die dazu äquivalenten Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 u_3 \\ \dot{u}_2 = u_3 u_1 \\ \dot{u}_3 = u_1 u_2 \end{cases}$$

und rechnen leicht nach, dass $A = u_1^2 - u_2^2$ und $B = u_1^2 - u_3^2$ konstant sind, da $\dot{A} = 2u_1 \dot{u}_1 - 2u_2 \dot{u}_2 = 2u_1(u_2 u_3) - 2u_2(u_3 u_1) = 0$, analog $\dot{B} = 0$.

Das heißt A und B sind *erhaltene Größen* unter der zeitlichen Veränderung von (u_1, u_2, u_3) . Insbesondere sind damit auch $u_2^2 = u_1^2 - A$ und $u_3^2 = u_1^2 - B$ konstant. Durch Quadrieren der ersten Gleichung folgt:

$$\dot{u}_1^2 = (u_1^2 - A)(u_1^2 - B) .$$

Wir setzen noch $y = \dot{u}_1$ sowie $x = u_2$, somit

$$y^2 = (x^2 - A)(x^2 - B) = x^4 - (A + B)x^2 + AB .$$

Diese Gleichung beschreibt nun eine *algebraische Kurve* C vom Grad 4, die unabhängig von t , also vom zeitlichen Verlauf ist.

Es bleibt zu zeigen, dass dies eine *elliptische Kurve* ist. Wir rechnen dazu nach, dass die zugehörige *Riemannsche Fläche* von Geschlecht 1 ist.

Die homogenisierte Gleichung zu $f(x, y) = -y^2 + (x^2 - A)(x^2 - B)$ lautet

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= -y^2 z^2 + (x^2 - Az^2)(x^2 - Bz^2) \\ &= -y^2 z^2 + x^4 - (A + B)x^2 z^2 + ABz^4 . \end{aligned}$$

Wir bestimmen dazu zunächst die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} &= 4x^3 - 2(A + B)xz^2 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} &= -2yz^2 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} &= -2y^2 z - 2(A + B)x^2 z + 4ABz^3 \end{aligned}$$

und stellen fest, dass

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge z = 0 .$$

Also hat C genau einen singulären Punkt $p = [0 : 1 : 0]$.

Weiter sehen wir

$$\begin{aligned} (x^2 - A)(x^2 - B) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - A) = 0 \vee (x^2 - B) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A} \vee x = \pm\sqrt{B} . \end{aligned}$$

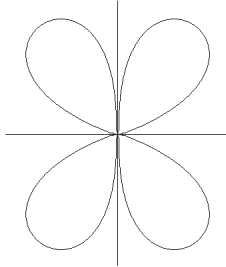


ABBILDUNG 4. Algebraische Kurve mit zweifachen Doppelpunkt

Folglich ist p ein zweifacher Doppelpunkt, da C vier tangentielle Geraden an p hat. Aus der Grad-Geschlecht-Formel, der *Formel von Riemann-Hurwitz*, erhalten wir (mit $d = 4$ und $\delta = 2$) für das Geschlecht der homogenisierten Kurve

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta = \frac{2 \cdot 3}{2} - 2 = 1 .$$

Die zugehörige Nullstellenmenge ist somit eine *Riemannsche Fläche* von Geschlecht 1, also ein Torus. Unter einer geeigneten Transformation, die zum gegebenen Problem recht schwierig zu berechnen sein kann, läßt sich damit die Kurve in *Weierstraßscher Normalform* schreiben, das heißt

$$\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}^3 - g_2\tilde{x} - g_3 .$$

Dazu wird eine Nullstelle der algebraischen Kurve vierten Grades auf den Punkt „Unendlich“ und die anderen drei auf die Nullstellen der algebraischen Kurve dritten Grades in Normalform abgebildet.

Insbesondere hängen g_2 und g_3 dabei von dem *Periodengitter* Λ des Fundamentalbereichs des zugehörigen Torus ab.

Die *Weierstraßschen \wp -Funktion* haben wir bereits kennengelernt und es gilt:

- (1) \wp ist meromorph und doppelperiodisch, das heißt

$$\wp(u + n\omega_1 + m\omega_2) = \wp(u), \quad n, m \in \mathbb{Z} ,$$

wobei ω_1 und ω_2 das Periodengitter Λ erzeugen,

- (2) \wp erfüllt die *Differentialgleichung der \wp -Funktion*

$$\wp(u)'^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 .$$

Desweiteren haben wir auch gesehen, dass $dt = dx/y$ eine holomorphe Eins-Form auf dieser Kurve ist.

Damit ist die Lösung bei geeigneter Parametrisierung unter der obigen Transformation in Normalform:

$$dt = d\wp/\wp' = du .$$

3. INTEGRABLE SYSTEME

3.1. Definition. Ein Differentialgleichungssystem heißt in (endlichdimensionaler) *Lax-Paar-Form*, falls es sich durch Polynome von $k \times k$ -Matrizen $A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ und $B(z) = \sum_{j=0}^m B_j z^j$, abhängig von dem sogenannten *Spektralparameter* z , schreiben läßt als

$$\dot{A} = [A, B] .$$

3.2. Definition. Eine Größe C heißt *erhaltene Größe* einer von t abhängigen Differentialgleichung, falls $\frac{d}{dt}C = 0$, also C konstant ist.

Dann nennt man C invariant unter der zeitlichen Veränderung des Systems ist.

3.3. Satz. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(y - A(z)) = 0$ von A sind eine erhaltene Größe einer Differentialgleichung in Lax-Paar-Form.

Beweis. Aus der Differentialgleichung in Lax-Paar-Form folgt sofort unter der Verwendung von $Sp(AB) = Sp(BA)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Sp(A^p) &= Sp(p [A, B] A^{p-1}) \\ &= p Sp(ABA^{p-1} - BA^p) \\ &= p Sp(BA^p - BA^p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Spur $Sp(A(z)^p)$ für alle p eine erhaltene Größe. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass sich das charakteristische Polynom durch die Summe von Spuren der Potenzen der Matrix darstellen läßt.

Also bleibt das ganze Spektrum von $A(z)$ erhalten. □

3.4. Ausblick. Durch das charakteristische Polynom $\det(y - A(z)) = 0$ ist nun eine algebraische Kurve, die sogenannte *Spektralkurve*, gegeben.

Weiter stellt man fest, dass die Lösung der Differentialgleichung auf der Jacobischen der gegebenen Spektralkurve verläuft. Dies führt zu der Theorie der integrablen Systeme

Im Fall einer elliptischen Kurve läßt sich aber die Jacobische mit der Kurve selbst identifizieren, was unserem Ergebnis in dem Beispiel der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt entspricht.

4. LITERATUR

4.1. **Algebraische Kurven.** —

- [1] P. A. Griffiths – Introduction to algebraic curves
(American Math. Soc., 1989)
- [2] F. Kirwan – Complex algebraic curves
(Cambridge Univ. Press, 1992)

4.2. **Funktionentheorie.** —

- [3] E. Freitag; R. Busam – Funktionentheorie
(Springer, 2000)
- [4] W. Fischer; I. Lieb – Funktionentheorie
(Vieweg, 1994)

4.3. **Differentialgleichungen.** —

- [5] V. I. Arnold – Gewöhnliche Differentialgleichungen
(Springer, 2001)

4.4. **Integrable Systeme.** —

- [6] M. Audin – Spinning tops : a course on integrable systems
(Cambridge Univ. Press, 1996)
- [7] N. J. Hitchin; G. B. Segal; R. S. Ward – Integrable systems : twistors, loop groups, and Riemann surfaces ; based on lectures given at a conference on integrable systems organized by N. M. J. Woodhouse and held at the Mathematical Institute, University of Oxford, in September 1997
(Clarendon Press, 1999)

4.5. **Mechanik.** —

- [8] V. I. Arnold. – Mathematical methods of classical mechanics
(Springer, ca. 2001)
- [9] Wikipedia
(www.wikipedia.de)

E-mail address: `dominik.wulf@stud.uni-goettingen.de`

MATHEMATISCHES INSTITUT, GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN