Der Satz von DESARGUES und der Satz von PAPPOS

Kirstin Strokorb

November 2005

Inhaltsverzeichnis

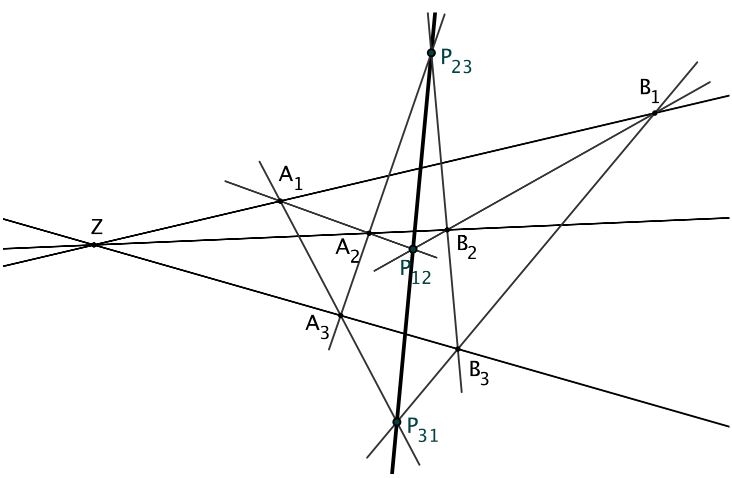
1 Einleitung

Die Sätze von DESARGUES (1593-1662) und PAPPOS (ca. 300 n. Chr.) sind zwei klassische Sätze der projektiven Geometrie. Sie treffen Aussagen über die Kollinearität von Punkten und sind mit einfachen Mitteln der linearen Algebra beweisbar. Der Satz von PAPPOS stellt einen Sonderfall des Satzes von PASCAL dar. Wir werden außerdem sehen, dass die Dualisierungen der beiden Sätze zu interessanten Resultaten führen: Der Satz von DESARGUES ist selbstdual und für den Satz von PAPPOS erhalten wir den Satz von BRIANCHON.

2 Der Satz von DESARGUES

Satz von DESARGUES Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, wobei $\dim V \geq 3$. Dann gilt in $P(V)$:

> Für jede Auswahl von paarweise verschiedenen Punkten $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ mit folgenden Eigenschaften:
>
> - A_i, B_i sind kollinear mit einem Punkt Z, wobei $Z \neq A_i \neq B_i \neq Z$ $(i = 1,2,3)$
> - A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3 sind nicht kollinear
>
> gilt, dass die Punkte[1] $P_{12} = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $P_{23} = A_2A_3 \cap B_2B_3$, $P_{31} = A_3A_1 \cap B_3B_1$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen.



[1] Zur Notation: $A_iA_j \cap B_iB_j$ bezeichne den Schnitt der (projektiven) Geraden durch A_i und A_j mit der Geraden durch B_i und B_j

Beweis[2]*:* Seien Z, A_i, B_i $(i = 1,2,3)$ wie oben und z, a_i, $b_i \in V$ so gewählt, dass $Z = \langle z \rangle$, $A_i = \langle a_i \rangle$, $B_i = \langle b_i \rangle$ $(i = 1,2,3)$.
Da für $i = 1,2,3$ die Punkte Z, A_i, B_i jeweils kollinear und damit z, a_i, b_i linear abhängig sind, existieren jeweils λ_i, $\mu_i \in K$, so dass

$$z = \lambda_i a_i + \mu_i b_i.$$

Dabei gilt λ_i, $\mu_i \neq 0$, da z, a_i, b_i paarweise linear unabhängig sind, denn $Z \neq A_i \neq B_i \neq Z$.

$$\Rightarrow z = \lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1 = \lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2 = \lambda_3 a_3 + \mu_3 b_3 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \langle \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \rangle = \langle \mu_2 b_2 - \mu_1 b_1 \rangle = P_{12}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich daraus, dass $P_{12} = A_1A_2 \cap B_1B_2 = \langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle$ als Schnitt verschiedener zweidimensionaler Unterräume von V höchstens eindimensional sein kann, andrerseits aber $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 = \mu_2 b_2 - \mu_1 b_1 \in \langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle$ und $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \neq 0$, da $\langle a_1 \rangle \neq \langle a_2 \rangle$ und $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Analog folgt aus $(*)$

$$P_{23} = \langle \lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 \rangle$$

$$P_{31} = \langle \lambda_3 a_3 - \lambda_1 a_1 \rangle$$

Daraus ergibt sich nun

$$P_{12} = \langle \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \rangle \in \langle \lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3, \lambda_3 a_3 - \lambda_1 a_1 \rangle = P_{23}P_{31}$$

P_{12}, P_{23}, P_{31} sind also kollinear.

□

2.1 Das Dualitätsprinzip

Das Dualitätsprinzip (in zwei Dimensionen) behauptet, dass in einem projektiven Raum jede Definition eine Bedeutung behält und jeder Satz wahr bleibt, wenn wir

Punkt und *Gerade*
Verbindung und *Schnitt*

vertauschen.[3]
In höheren Dimensionen werden *Punkt* und *Hyperebene*, *Gerade* und $(n-2)$-*dimensionaler Unterraum* etc. vertauscht (falls $\dim P = n$).
Das Dualitätsprinzip ist ein Satz über mathematische Sätze. Eine streng logische Begründung kann man zum Beispiel erbringen, indem man beachtet, dass die

[2]vgl. hierzu [3] S. 161 und [1] S. 56f
[3]vgl. [4] S. 21

Axiome der projektiven Geometrie ihre eigenen Dualisierungen enthalten. Das führt uns aber an dieser Stelle zu weit in den Bereich der synthetischen Geometrie[4]. Eine andere Herangehensweise findet sich in Betrachtungen über den Dualraum[5]. Beim Satz von DESARGUES ist der Satz, den wir durch Dualisieren in $P_2(K)$ erhalten gerade die logische Umkehrung des Satzes von DESARGUES. Das ist so zu verstehen:

Für zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$, die auch durch Angabe der Seiten a_1, a_2, a_3 bzw. b_1, b_2, b_3 (als Geraden, die nicht durch einen Punkt verlaufen) fixiert werden können, betrachten wir folgende Eigenschaften[6]:

(E_1) Es existiert ein Punkt Z, so dass A_i, B_i und Z für $i = 1,2,3$ jeweils kollinear sind.

(E_2) Es existiert eine Gerade z, so dass a_i, b_i und z für $i = 1,2,3$ jeweils durch einen Punkt verlaufen.

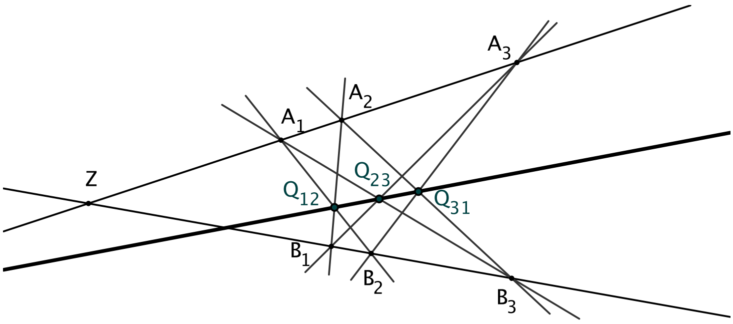
Der **Satz von DESARGUES** besagt dann $(E_1) \Rightarrow (E_2)$. Der dazu **duale Satz** ist in diesem Fall $(E_2) \Rightarrow (E_1)$.

3 Der Satz von PAPPOS

Satz von PAPPOS Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, wobei $\dim V \geq 3$. Dann gilt in $P(V)$:

> Für jede Auswahl von paarweise verschiedenen Punkten $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ gilt:
>
> Liegen A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden g und B_1, B_2, B_3 auf einer Geraden h, wobei $g \cap h \neq \varnothing$ und $A_i \neq g \cap h \neq B_i$ $(i = 1,2,3)$, so liegen die Punkte $Q_{12} = A_1B_2 \cap B_1A_2$, $Q_{23} = A_2B_3 \cap B_2A_3$, $Q_{31} = A_3B_1 \cap B_3A_1$ auf einer gemeinsamen Geraden.

[4] siehe dazu auch [4] S. 21f und [1] S. 9ff
[5] siehe dazu auch [3] S. 172ff und [5] S. 57ff
[6] vgl. [2] S. 199



Beweis[7]*:* Seien g, h, A_i, B_i $(i = 1,2,3)$ wie oben, $Z := g \cap h$ und z, a_i, $b_i \in V$ wiederum so gewählt, dass $Z = \langle z \rangle$, $A_i = \langle a_i \rangle$, $B_i = \langle b_i \rangle$ $(i = 1,2,3)$.
Da A_1, A_2, A_3, Z kollinear sind, also a_2, $a_3 \in \langle a_1, z \rangle$, existieren $a \in V$ und $\lambda \in K$, so dass

$$A_1 = \langle a \rangle, \quad A_2 = \langle z + a \rangle, \quad A_3 = \langle z + \lambda a \rangle.$$

Analog existieren $b \in V$ und $\mu \in K$, so dass

$$B_1 = \langle z + b \rangle, \quad B_2 = \langle b \rangle, \quad B_3 = \langle z + \mu b \rangle.$$

Damit folgt nun $Q_{12} = A_1B_2 \cap B_1A_2 = \langle a, b \rangle \cap \langle z + b, z + a \rangle = \langle a - b \rangle$.

Die letzte Gleichheit ergibt sich daraus, dass erstens $A_1B_2 \neq B_1A_2$, also Q_{12} als Schnitt verschiedener zweidimensionaler Unterräume von V höchstens eindimensional sein kann, und zweitens $a - b \in \langle a, b \rangle = A_1B_2$ sowie $a - b = -(z + b) + (z + a) \in \langle z + b, z + a \rangle$. Analog folgt

$$\begin{aligned} Q_{23} &= A_2B_3 \cap B_2A_3 = \langle z + a, z + \mu b \rangle \cap \langle b, z + \lambda a \rangle \\ &= \langle \lambda(z + a) + (1 - \lambda)(z + \mu b) \rangle = \langle (\mu - \lambda\mu)b + (z + \lambda a) \rangle \\ &= \langle z + \lambda a + \mu b - \lambda\mu b \rangle = \langle c - \lambda\mu b \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{31} &= A_3B_1 \cap B_3A_1 = \langle z + \lambda a, z + b \rangle \cap \langle z + \mu b, a \rangle \\ &= \langle (1 - \mu)(z + \lambda a) + \mu(z + b) \rangle = \langle (z + \mu b) + (\lambda - \mu\lambda)a \rangle \\ &= \langle z + \lambda a + \mu b - \mu\lambda a \rangle = \langle c - \mu\lambda a \rangle \end{aligned}$$

für $c := z + \lambda a + \mu b$. Daraus ergibt sich nun

$$Q_{12} = \langle a - b \rangle = \langle \mu\lambda a - \lambda\mu b \rangle \in \langle c - \lambda\mu b, c - \mu\lambda a \rangle = Q_{23}Q_{31}.$$

Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} sind also kollinear.

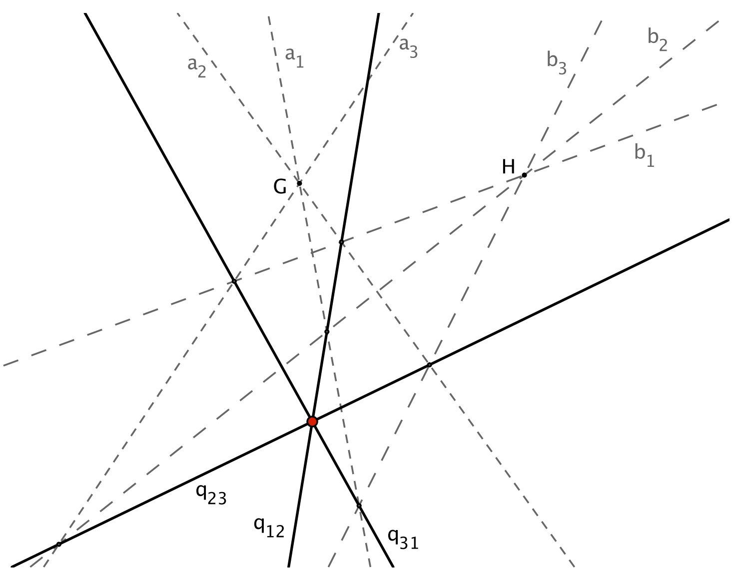
□

[7] vgl. hierzu [2] S. 229 und [1] S. 57f

Bemerkung In der Literatur findet man manchmal, dass der Begriff Körper den Begriff Schiefkörper mit einschließt. Tatsächlich gilt der Satz von PAPPOS aber nur genau dann, wenn K kommutativ ist. Das haben wir im letzten Beweisschritt genutzt. Der Satz von DESARGUES hingegen gilt auch, falls K ein Schiefkörper ist.

Die Dualisierung des Satzes von PAPPOS führt uns in $P_2(K)$ auf den

Satz von BRIANCHON Für jede Auswahl von paarweise verschiedenen Geraden a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 gilt: Verlaufen a_1, a_2, a_3 durch einen gemeinsamen Punkt G und b_1, b_2, b_3 durch einen gemeinsamen Punkt H, wobei $a_i \neq GH \neq b_i$ $(i = 1,2,3)$, so verlaufen die Geraden[8] $q_{12} = (a_1 \cap b_2)(b_1 \cap a_2)$, $q_{23} = (a_2 \cap b_3)(b_2 \cap a_3)$, $q_{31} = (a_3 \cap b_1)(b_3 \cap a_1)$ durch einen gemeinsamen Punkt.



4 Zwei Konstruktionsaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Anwendungsbeispiele für den Satz von Desargues bzw. dessen Umkehrung, jeweils im zweidimensionalen Fall.

Das kleine Blatt Auf einem Blatt Papier sind zwei Geraden gegeben, die sich außerhalb des Blattes schneiden. Man konstruiere auf dem Blatt die Gerade, die durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und einen weiteren vorgegebenen Punkt auf dem Blatt verläuft.

[8]Zur Notation: $(a_i \cap b_j)(b_i \cap a_j)$ bezeichne die (projektive) Gerade durch die Punkte $(a_i \cap b_j)$ und $(b_i \cap a_j)$

Lösung: Sei der vorgegebene Punkt auf dem Blatt fortan mit A_2 bezeichnet und die vorgegebenen Geraden mit g und h. Ihr Schnittpunkt Z liegt außerhalb des Blattes. Dann führt folgende Konstruktion zu einer Lösung des Problems:

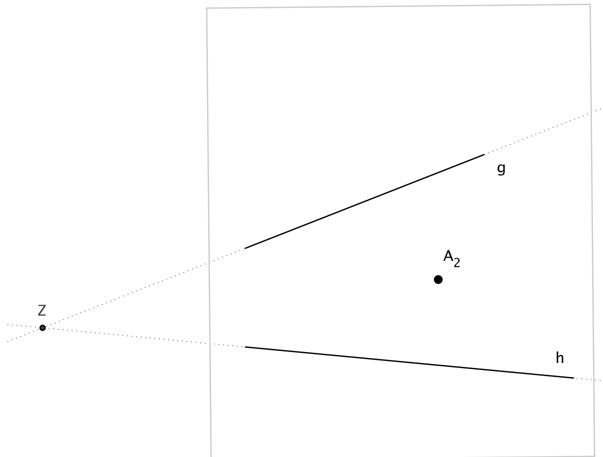
1 Zeichnen einer Gerade, die g in einem Punkt A_1 schneidet und einer weiteren (davon verschiedenen) Gerade, die h in einem Punkt A_3 schneidet und Verbinden von A_1 und A_3 durch eine weitere Gerade.

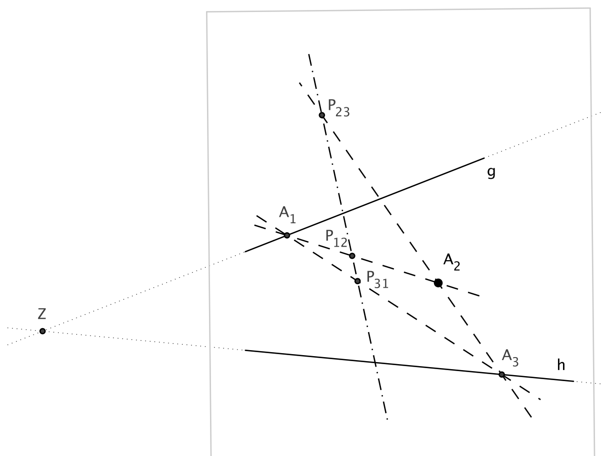
2 Zeichnen einer Gerade, die alle Geraden A_iA_j schneidet. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Gerade A_iA_j sei mit P_{ij} bezeichnet $((i,j) \in (1,2),(2,3),(3,1))$.

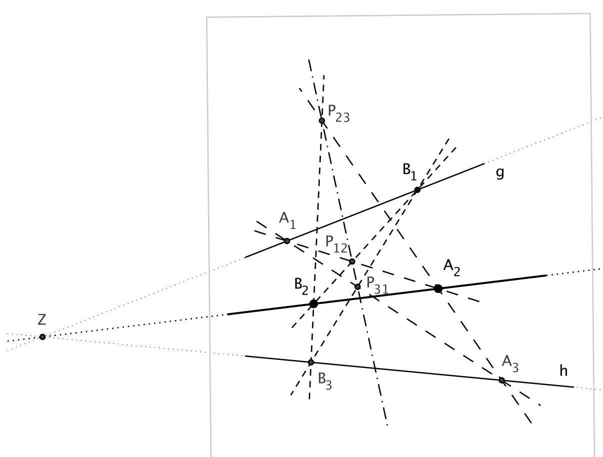
3 Festlegen eines Punktes $B_3 \in h$ mit $B_3 \neq A_3$. Der Schnittpunkt von B_3P_{31} mit g sei B_1.

4 Schließlich sei B_2 der Schnittpunkt von B_1P_{12} mit $P_{23}B_3$. Dann ist A_2B_2 die gesuchte Gerade.

Das folgt unmittelbar aus der Dualisierung des Satzes von Desargues für zweidimensionale projektive Räume, die in dieser Situation wie folgt lautet:

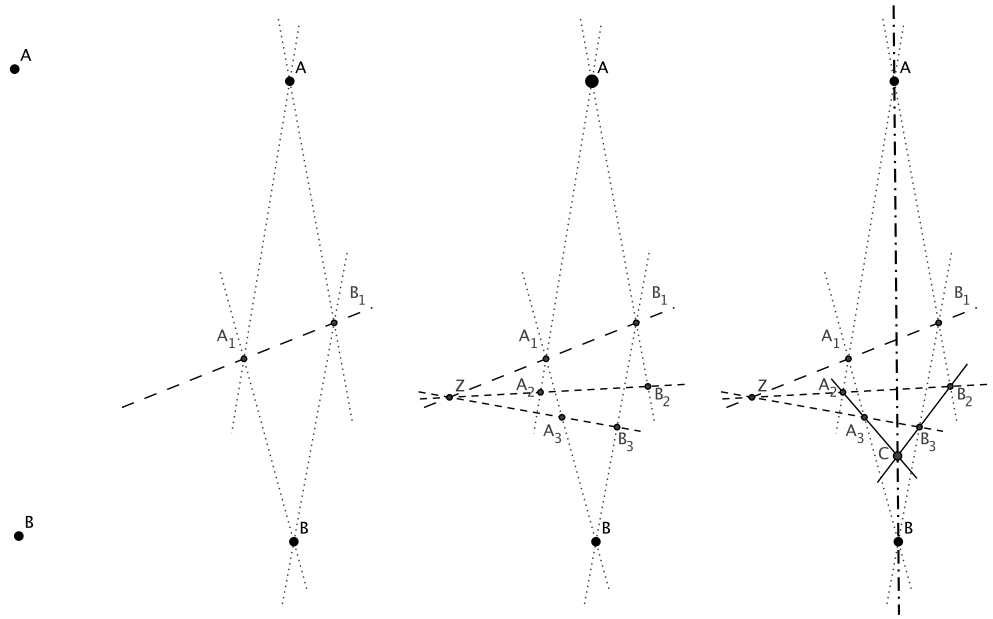






$g = A_1B_1$ und $h = A_3B_3$ verlaufen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt mit A_2B_2, wenn P_{12}, P_{23}, P_{31} kollinear sind.

Das kurze Lineal Es ist die Verbindungsstrecke zweier Punkte mit einem Lineal zu konstruieren, das nicht so lang ist wie der Abstand dieser beiden Punkte.



Lösung: Die folgende Konstruktion setzt ein gewisses Augenmaß voraus, so dass das Lineal praktisch auch nicht mehr beliebig kurz sein darf, sondern nur so kurz, dass sich die gleich beschriebenen Hilfspunkte immer noch durch das Lineal verbinden lassen. Dabei kann es nötig sein, die Winkel zwischen manchen Geraden recht klein zu wählen und solche gegebenenfalls durch mehrmaliges Anlegen des Lineals zu verlängern. Außerdem muss der Punkt C, der letztendlich mit einem der Ausgangspunkte A oder B verbindbar sein soll, nahe genug an A oder B konstruiert werden. Das ist anschaulich sicherlich möglich; auf eine exakte Begründung wird an dieser Stelle verzichtet.

Seien also die beiden vorgegebenen Punkte mit A und B bezeichnet. Dann liefert die folgende Konstruktion (unter den genannten Einschränkungen) die gesuchte Verbindungsstrecke:

1 Zeichnen von jeweils zwei Strahlen an A und B so, dass sich die Verbindungsstrecke von zwei der entstehenden Schnittpunkte noch mit dem Lineal zeichnen lässt und die Verbindungsstrecke AB schneiden würde. Diese Schnittpunkte seien fortan A_1 und B_1.

2 Festlegen eines Punktes Z auf A_1B_1 und Zeichnen von zwei weiteren Geraden durch Z. Die Schnittpunkte der einen Gerade mit AA_1 und AB_1 seien entsprechend A_2 und B_2, die der anderen Gerade mit BA_1 und BB_2 seien A_3 und B_3. Dabei ist wieder darauf zu achten, dass diese beiden Geraden so gezeichnet werden, dass sich im nächsten Konstruktionsschritt A_2 und A_3 sowie B_2 und B_3 jeweils noch durch das Lineal verbinden lassen.

3 Schließlich liegt der Punkt $C := A_2A_3 \cap B_2B_3$ als Folgerung aus dem Satz von Desargues auch auf der Gerade AB (A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt $\Rightarrow C \in AB$). Wie eingangs erwähnt, sollte C nahe genug bei A oder B liegen, um die entsprechende Verbindungsstrecke mit dem kurzen Lineal zeichnen zu können und gegebenenfalls in die richtige Richtung durch Anlegen des Lineals zu verlängern.

5 Literatur

[1] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie*, Braunschweig, Wiesbaden 1992 (Verlag Vieweg)

[2] C.-A. Faure, A. Frölicher: *Modern Projective Geometry*, 2000 (Kluwer Academic Pubishers)

[3] G. Fischer: *Analytische Geometrie*, Braunschweig, Wiesbaden 2001 (Verlag Vieweg)

[4] H. S. M. Coxeter (Übers. W. Burau): *Reelle projektive Geometrie der Ebene*, München 1955 (Verlag von R. Oldenbourg)

[5] U. Stuhler: *Analytische Geometrie und lineare Algebra II*, Göttingen 1999 (Vorlesungsskript SS 2004)