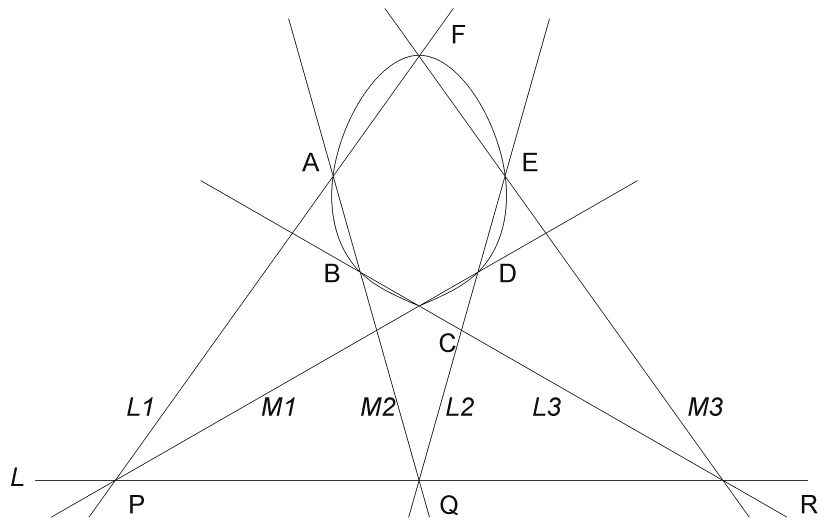
Geometrie von

Flächen und Algebraischen Kurven

Der Satz von Pascal

Laura Hinsch

November 2005



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Satz von Pascal ist ein zentraler Satz der projektiven Geometrie und auch bekannt als Pascals mystisches Hexagon. Er besagt, dass sich die Verlängerungen gegenüberliegender Seiten eines beliebigen projektiven Sechsecks sich genau dann in drei kollinearen Punkten schneiden, wenn die sechs Ecken auf einem regulären Kegelschnitt liegen. Pascal hat diesen Satz 1639 im Alter von 16 Jahren formuliert und bewiesen, fast zweihundert Jahre, bevor der Glaube an eine einzige uns umgebende Geometrie aufgegeben wurde. Vielleicht ist das Mystische an dem Satz, wie Pascal ihn zum Beispiel für ein regelmäßiges Sechseck bewiesen hat. Der Satz ist gewissermassen eine Verallgemeinerung des Satzes von Pappos. Der Satz von Pappos beschreibt eine Eigenschaft von Geradenpaaren, also ausgearteten Kegelschnitten, während der Satz von Pascal eine Eigenschaft von regulären Kegelschnitten beschreibt.

Zum Beweis benötigt man eine schwache Form des Satzes von Bézout und das Lemma von Study. Die Beweise beider Sätze finden sich zum Beispiel in [2].

2 Algebraische Kurven

2.1 Satz Zwei ebene algebraische projektive Kurven $C, D \subseteq P^2(\mathbb{C})$ haben einen nichtleeren Schnitt.

Beweis. Seien $C = V(f), D = V(g)$, wobei f, g homogene Polynome in $\mathbb{C}[x, y, z]$ mit

$$grad(f) = m, \; grad(g) = n$$

sind. Die Resultante $R_{f,g}(y, z)$ ist ein homogenes Polynom in $\mathbb{C}[x][y, z]$ mit

$$grad(R_{f,g}(y, z)) = mn,$$

siehe [2, S. 52f]. $R_{f,g}(y, z)$ ist entweder 0 oder zerfällt in mn Linearfaktoren der Gestalt $bz - cy$, wobei $b, c \in \mathbb{C}$ und nicht beide gleich Null sind.

Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert also ein $(b,c) \in \mathbb{C}^2$ mit $R_{f,g}(b,c) = 0$

Daraus folgt

$$R_{f(x,b,c),g(x,b,c)} = 0 \text{ in } \mathbb{C}[x].$$

Daraus folgt nach [2, Lemma 3.3], dass $f(x,b,c)$ und $g(x,b,c)$ eine gemeinsame Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ haben. Dann ist $[a,b,c] \in C \cap D$ $\square$

2.2 Definition Sei $C = V(f) := \{P \in P^2(\mathbb{C}) |\ f(P) = 0\}$ eine projektive algebraische Kurve, das heisst $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ und f homogen. Dann ist $grad(C) := grad(f)$.

2.3 Satz von Bézout (Schwache Form) Seien C, D ebene algebraische Kurven in $P^2(\mathbb{C})$ deren Schnitt nur endlich viele Punkte enthält, $grad(C) = m,\ grad(D) = n$

Dann gilt:

$$|C \cap D| \leq mn$$

Für einen Beweis siehe zum Beispiel [2, S. 54, Lemma 3.9].

2.4 Definition Die Nullstellenmenge $V(q)$ eines homogenen Polynoms q heißt Quadrik.

2.5 Bemerkung q ist ein homogenes Polynom vom Grad 2, also auch eine quadratische Form. Für $char(K) \neq 2$ können wir q eineindeutig eine symmetrische Bilinearform zuordnen. Nach Wahl einer Basis von K^3 ist diese eindeutig durch eine symmetrische 3×3 Matrix A gegeben. A läßt sich diagonalisieren, durch Achsenskalierung erhält man Matrizen mit 1 oder -1 auf der Diagonalen und sonst verschwindenden Einträgen. Über $\mathbb{C}$ ist -1 ebenfalls Quadrat, also kann man annehmen, dass in A auf der Diagonalen 1 und 0 stehen und alle anderen Einträge verschwinden. Es gilt dann:

$$\begin{array}{ccc}
rang(A) = 3 \Leftrightarrow & q \text{ regulär} & \Leftrightarrow C \text{ regulär} \\
rang(A) < 3 \Leftrightarrow & q \text{ ausgeartet} & \Leftrightarrow C \text{ ausgeartet} \\
rang(A) = 2 & \Leftrightarrow & C \text{ Geradenpaar} \\
rang(A) = 1 & \Leftrightarrow & C \text{ Doppelgerade}
\end{array}$$

3 Singularitäten

3.1 Definition Sei $C = V(f) \subseteq P^2(\mathbb{C})$ eine Kurve mit $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. $P \in C$ heißt singulärer Punkt oder Singularität von C, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0,\ i = 1, 2, 3$$

Eine Kurve heißt singulär, falls sie singuläre Punkte besitzt. Andernfalls heißt sie regulär.

3.2 Satz Sei $C = V(f) \subseteq P^2(\mathbb{C})$ eine Kurve. Dann gilt:

i) C regulär $\Rightarrow$ C irreduzibel

ii) C irreduzibel $\Rightarrow$ C hat höchstens endlich viele Singularitäten

Beweis. i) Angenommen, $C = V(f)$ und es gibt $g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]$ mit $f = gh$, das heißt, C ist reduzibel. Nach Satz (2.1) existiert $P \in V(g) \cap V(h)$. Es ist $P \in C$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0,$$

P ist also eine Singularität von C.

ii) Sei $grad(f) = n$, f irreduzibel und homogen. Sei $[1, 0, 0] \notin C$ also $f(1, 0, 0) \neq 0$. Falls $[1, 0, 0] \in C$, kann man C durch eine Projektivität so verschieben, dass eine zu C äquivalente Kurve $\tilde{C}$ $[1, 0, 0]$ nicht enthält.

Sei $g := \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Da $f(1, 0, 0) \neq 0$, hat x^n in f einen nichtverschwindenden Koeffizientent, also auch in g. Also ist g homogen, verschwindet nicht und hat Grad $n - 1$. Es gilt:

$$grad(g) \leq grad(f),\ g \nmid f.$$

Daraus folgt nach dem Satz von Bézout:

$$|C \cap V(g)| \leq n(n - 1) < \infty$$

Also ist die Anzahl der Singularitäten von C endlich, denn die Menge der Singularitäten von C ist in $C \cap V(g)$. $\square$

3.3 Folgerung Jede irreduzible Quadrik $C \subseteq P^2(\mathbb{C})$ ist projektiv äquivalent zu

$$\{[x, y, z] \in P^2(\mathbb{C}) | x^2 = yz\}$$

und insbesondere nicht singulär.

Beweis. Wegen Satz (3.2) hat C höchstens endlich viele singuläre Punkte. Wie oben kann man annehmen, dass $P = [1, 0, 0] \in C$ aber P kein singulärer Punkt von C. Genauso kann man annehmen, dass die Tangente an P $z = 0$ ist.

Daraus folgt, dass C gegeben ist durch

$$ayz + bx^2 + cxz + dz^2 = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Es ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$ weil C irreduzibel ist. Mit der Projektivität

$$[x, y, z] \mapsto [\sqrt{b}, cx + ay + dz, -z]$$

geht $x^2 = yz$ über in (1). □

4 Der Satz von Pascal

4.1 Definition Seien $P_1, \dots, P_n \in P^2(\mathbb{C})$ beliebig, $d \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$S_d := \{f \in \mathbb{C}[x, y, z] \mid f \text{ homogen vom Grad } d\}$$
$$S_d(P_1, \dots, P_n) := \{f \in S_d | f(P_i) = 0, i = 1, \dots, n\}$$

S_d entspricht der Menge der algebraischen Kurven in $P^2(\mathbb{C})$ vom Grad d, $S_d(P_1, \dots, P_n)$ der Menge der algebraischen Kurven vom Grad d, die $P_1, \dots, P_n$ enthalten.

4.2 Satz Seien $P_1, \dots, P_n \in P^2(\mathbb{C})$ beliebig, $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

i) $$dim(S_d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

ii) $$dim(S_d(P_1, \dots, P_n)) \geq \frac{(d+1)(d+2)}{2} - n$$

Beweis. i) Betrachte die Monome in $\mathbb{C}[x, y, z]$ vom Grad d, also die Menge

$$B := \{x^i y^j z^k | i + j + k = d\}.$$

Die Monome sind linear unabhängig und es gilt:

$$|B| = \begin{pmatrix} d+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}.$$

ii) Für $n = 1$ ist $f(P_1) = 0$ mit beliebigen Koeffizienten für $f \in S_d$ eine lineare Gleichung in $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ Unbekannten. Also ist $dim(S_d(P)) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$. Die Punkte $P_2, \ldots, P_n$ sind nicht als paarweise verschieden vorausgesetzt, daher bedeutet jeder hinzugenommene Punkt höchstens eine neue lineare Bedingung. $\square$

4.3 Lemma von Study Seien $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ beliebig. Ist f irreduzibel, $grad(f) \geq 1$ und $V(f) \subseteq V(g)$, dann gilt:

$$f | g$$

Das Lemma von Study ist eine einfache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [3, S. 13].

4.4 Lemma Sei $d \in \mathbb{N}, f \in S_d$, $L = V(h)$ eine Gerade, $C = V(q)$ eine Quadrik. Dann gilt:

i) $f \equiv 0$ auf $L \Rightarrow h|f \quad \Leftrightarrow \exists \tilde{f} \in S_{d-1}$ mit $f = \tilde{f}h$

ii) $f \equiv 0$ auf $C \Rightarrow q|f \quad \Leftrightarrow \exists \tilde{\tilde{f}} \in S_{d-2}$ mit $f = \tilde{\tilde{f}}q$

Beweis. Da $f \equiv 0$ auf L beziehungsweise C ist $L \subseteq V(f)$ beziehungsweise $C \subseteq V(f)$. Daraus folgt mit dem Lemma von Study sofort $h|f$ beziehungsweise $q|f$, weil $grad(h) = 1 \geq 1$ und $grad(q) = 2 \geq 1$. $\square$

4.5 Folgerung Sei $L = V(h) \subseteq P^2(\mathbb{C})$ eine Gerade, $C = V(q) \subseteq P^2(\mathbb{C})$ eine Quadrik, $P_1, \dots P_n \in P^2(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & P_1, \dots P_a \in L, P_{a+1}, \dots, P_n \notin L,\ a > d \\ \Rightarrow & S_d(P_1, \dots, P_n) = hS_{d-1}(P_{a+1}, \dots, P_n) \\ \text{ii)} & P_1, \dots P_a \in C, P_{a+1}, \dots, P_n \notin C,\ a > 2d \\ \Rightarrow & S_d(P_1, \dots, P_n) = qS_{d-2}(P_{a+1}, \dots, P_n) \end{array}$$

Beweis. i) Es gilt für alle $f \in S_d$:

$$\{P_1, \dots, P_a\} \subseteq V(f) \cap L\ .$$

Da $a > d$ ist nach dem Satz von Bézout $L \subseteq V(f)$. Wegen Lemma (4.4) also $f = h\tilde{f}$.
Da $P_{a+1}, \dots, P_n \notin L$ also $\tilde{f} \in S_{d-1}(P_{a+1}, \dots, P_n)$
ii) Analog □

4.6 Folgerung Seien $P_1, \dots, P_5 \in P^2(\mathbb{C})$ paarweise verschieden, keine vier kollinear. Dann existiert genau eine Quadrik, die $P_1, \dots, P_5$ enthält.

Beweis. Wegen Satz (4.2) gilt $dim(S_2(P_1, \dots, P_5)) \geq 1$.
Angenommen, es existieren zwei Quadriken C_1, C_2, die $P_1, \dots P_5$ enthalten, wobei $C_1 = V(q_1)$, $C_2 = V(q_2)$ und

$$\{P_1, \dots, P_5\} \subseteq C_1 \cap C_2.$$

1. Fall: C_1 regulär
Es gilt:

$$4 < 5 = |\{P_1, \dots, P_5\}| \leq |C_1 \cap C_2.$$

Also ist nach dem Satz von Bézout $C_1 \subseteq C_2$, denn wären C_1 und C_2 verschieden, wäre $|C_1 \cap C_2| \leq 4$. Daraus folgt nach dem Lemma von Study $q_1 | q_2$. Da $grad(q_1) = grad(q_2)$ ist also $q_2 = \lambda q_1$, also sind $C_1 = V(q_1)$ und $C_2 = V(q_2)$ gleich.

2. Fall: C_1 singulär

Nach (2.5) muss C_1 ein Geraden*paar* sein, da andernfalls alle fünf Punkte kollinear wären. Also ist $C_1 = L_0 \cup L_1$. Nach eventueller Umnummerierung kann man annehmen, dass L_0 drei Punkte enthält und L_1 die anderen beiden. Daraus folgt, dass auch C_2 ein Geradenpaar ist, da es die drei kollinearen Punkte aus L_0 enthält, also $C_2 = L_0 \cup L_2$. Dann folgt

$$C_1 \cap C_2 = (L_0 \cup L_1) \cap (L_0 \cup L_2) = L_0 \cup (L_1 \cap L_2).$$

Es ist entweder $L_1 \cap L_2$ genau ein Punkt oder $L_1 = L_2$. Da keine vier der fünf Punkte kollinear sind, muss $L_1 \cap L_2$ mindestens zwei Punkte enthalten, also muss $L_1 = L_2$ sein. Also ist $C_1 = C_2$. □

4.7 Satz Seien $P_1, \dots P_8 \in P^2(\mathbb{C})$ paarweise verschiedene Punkte, von denen keine vier kollinear sind und keine sieben auf einer regulären Quadrik liegen. Dann gilt:

$$dim(S_3(P_1, \dots P_8)) = 2$$

Beweis. Nach Satz (4.2) gilt: $dim(S_3(P_1, \dots P_8)) \geq 2$.

1. Fall: Keine drei Punkte sind kollinear, keine sechs liegen auf einer regulären Quadrik

Angenommen, $dim(S_3(P_1, \dots P_8)) \geq 3$. Seien P_9, P_{10} zwei weitere Punkte auf $L = \overline{P_1 P_2}$, $L = V(h)$. Es gilt:

$$dim(S_3(P_1, \dots P_{10})) \geq dim(S_3(P_1, \dots P_8)) - 2 = 1$$

Daraus folgt, dass es mindestens eine homogene Form vom Grad 3 gibt, die auf $P_1, \dots P_{10}$ verschwindet. Sei $F \in S_3(P_1, \dots P_{10})$. Es ist $F \not\equiv 0$ aber $F \equiv 0$ auf L. Daraus folgt wegen Folgerung (4.5): $F = hq$ für ein $q \in S_2(P_2, \dots P_8)$. Damit liegen aber sechs der acht Punkte auf einer regulären Quadrik, Widerspruch.

2. Fall: Drei Punkte sind kollinear

Nach eventueller Umnummerierung kann man annehmen, dass $P_1, P_2, P_3 \in L = v(h)$. Sei P_9

ein vierter Punkt auf L. Da $P_4, \dots, P_8 \notin L$ folgt aus Folgerung (4.5):

$$S_3(P_1, \dots P_9) = hS_2(P_4, \dots P_8)$$

Da es nach Folgerung (4.6) genau eine Quadrik gibt, die fünf Punkte enthält, von denen keine vier kollinear sind gilt: $dim(S_2(P_4, \dots P_8)) = 1$. Daraus folgt

$$dim(S_3(P_1, \dots P_9)) = 1$$

Es ist

$$dim(S_3(P_1, \dots P_9)) \geq dim(S_3(P_1, \dots P_8)) - 1,$$

da der hinzugenommene Punkt P_9 höchstens eine weitere lineare Bedingung liefert. Also gilt:

$$dim(S_3(P_1, \dots P_8)) \leq dim(S_3(P_1, \dots P_9)) + 1 = 2$$

3. Fall: Sechs Punkte liegen auf einer regulären Quadrik

Nach Umnummerierung kann man annehmen: $P_1, \dots, P_6 \in C = V(q)$, wobei $grad(C) = 2$. Sei P_9 ein siebter Punkt auf C. Da $P_7, P_8 \notin C$ gilt nach Folgerung (4.5):

$$S_3(P_1, \dots P_9) = qS_1(P_7, P_8)$$

Durch zwei verschiedene Punkte existiert immer genau eine Gerade, also $dim(S_1(P_7, P_8)) = 1$. Daraus folgt:

$$dim(S_3(P_1, \dots P_8)) \leq dim(S_d(P_7, P_8)) + 1 = 2.$$

□

4.8 Folgerung Seien $C_1 = V(f_1),\ C_2 = V(f_2) \subseteq P^2(\mathbb{C})$ zwei ebene algebraische Kurven vom Grad 3, $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \dots P_9\}$. Dann gilt:

$$\forall g \in S_3(P_1, \dots, P_8) \text{ ist } P_9 \in D$$

Beweis. Von $P_1, \dots, P_8$ sind keine vier kollinear und es liegen keine sieben auf einer regulären Quadrik. Andernfalls wäre $C_1 \cap C_2 \neq \{P_1, \dots P_9\}$, da dann der Schnitt von C_1 und C_2 jeweils

die ganze Gerade beziehungsweise Quadrik enthalten würde.
Also ist nach Satz (4.7) $dim(S_3(P_1, \dots, P_8)) = 2$. f_1 und f_2 sind linear unabhängig. Andernfalls wäre das eine Polynom ein Vielfaches des anderen, die beiden Kurven projektiv äquivalent und demzufolge $C_1 \cap C_2 = C_1 = C_2$. Also ist $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von $S_3(P_1, \dots, P_8)$. Man kann also alle $g \in S_3(P_1, \dots, P_8)$ mit f_1 und f_2 darstellen:

$$g = \lambda f_1 + \mu f_2$$

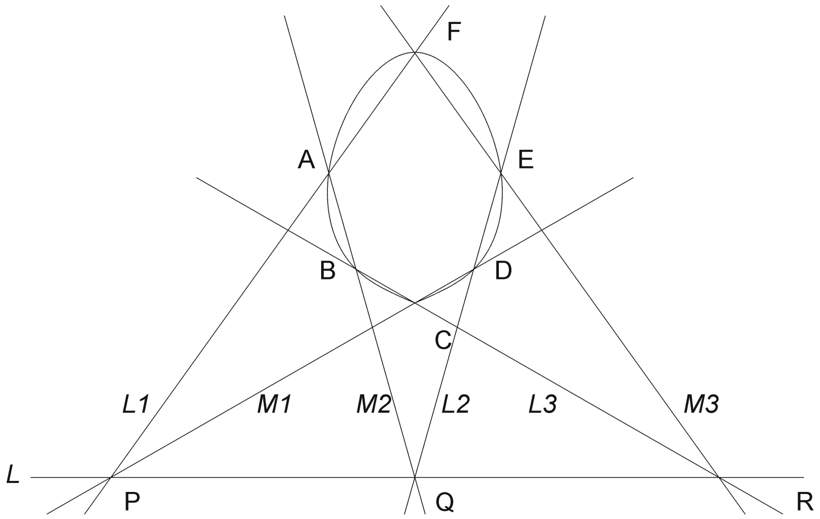
Daraus folgt: $g(P_9) = \lambda f_1(P_9) + \mu f_2(P_9) = 0$ für alle $g \in S_3(P_1, \dots, P_8)$. $\square$

4.9 Satz von Pascal Sei $ABCDEF \subseteq P^2(\mathbb{C})$ ein echtes Sechseck, das heißt A, B, C, D, E, F sind paarweise verschieden und keine sind kollinear. Seien weiter

$$P = AF \cap CD,\ Q = AB \cap DE,\ R = BC \cap EF$$

ebenfalls paarweise verschieden. Dann gilt:

A, B, C, D, E, F liegen genau dann auf einer regulären Quadrik, wenn P, Q, R kollinear sind.



Beweis. Betrachte

$$L_1 = PAF,\ L_2 = QDE,\ L_3 = RBC$$

$$M_1 = PCD,\ M_2 = QAB,\ M_3 = REF$$

$$C_1 = L_1 \cup L_2 \cup L_3,\ C_2 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \in S_3$$

$$C_1 \cap C_2 = \{A, B, C, D, E, F, P, Q, R\} = Z$$

$\Longrightarrow$

Sei $\Gamma = V(q)$ die reguläre Quadrik, die A, B, C, D, E, F enthält. Sei $L = \overline{PQ} = V(h)$. Es ist $\Gamma \cup L \subseteq P^2(\mathbb{C})$ eine Kurve vom Grad 3, denn

$$\Gamma \cup L = \{P \in P^2(\mathbb{C}) |\ q(P) = 0 \vee h(P) = 0\} = \{P \in P^2(\mathbb{C}) |\ q(P)h(P) = 0\}.$$

Ausserdem ist

$$Z \setminus \{R\} \subseteq \Gamma \cup L.$$

Also ist nach Folgerung (4.8) $R \in \Gamma \cup L$.

$R \notin \Gamma$ sonst wären $L_3, M_3 \subseteq \Gamma$ und damit Γ ein Geradenpaar und nicht regulär. Also ist $R \in L$ und somit sind P, Q, R kollinear.

$\Longleftarrow$

Seien P, Q, R kollinear, $L = V(h)$ die Gerade mit $\{P, Q, R\} \subseteq L$. Aus Folgerung (4.6) folgt, dass es genau eine Quadrik Γ gibt, die A, B, C, D, E enthält. Γ ist nicht ausgeartet, da von A, B, C, D, E keine drei kollinear sind. Es ist wie oben $\Gamma \cup L = V(qh)$, also eine Kurve von Grad 3 und

$$Z \setminus \{F\} \subseteq \Gamma \cup L.$$

Also ist nach Folgerung (4.8) $F \in \Gamma \cup L$.

$F \notin L$, andernfalls wären die Geraden und Punkte nicht paarweise verschieden. Also ist $F \in \Gamma$. $\square$

Literatur

[1] Miles Reid - Undergraduate algebraic Geometry - Cambridge University Press, 1988

[2] Frances Kirwan - Complex algebraic curves - Cambridge University Press 1992

[3] Gerd Fischer - Ebene Algebraische Kurven - Vieweg, 1994